Aufgabe 6: a) $f' = (\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, \partial f/\partial x_3) =$
$\left(\frac{\cos(x_1+x_2+2x_3)+x1\sin(x_1+x_2+2x_3)}{\cos^2(x_1+x_2+2x_3)}, \frac{x1\sin(x_1+x_2+2x_3)}{\cos^2(x_1+x_2+2x_3)}, 2\frac{x1\sin(x_1+x_2+2x_3)}{\cos^2(x_1+x_2+2x_3)}\right)$.
$\nabla f = (f')^\top$

b) $f' = \frac{1}{(1+x_1+x_2+x_3)^2}\begin{pmatrix} 1+x_2+x_3 & -x_1 & -x_1 \\ -x_2 & x_1+1+x_3 & -x_2 \\ -x_3 & -x_3 & x_1+x_2+1 \end{pmatrix}$

Aufgabe 7: $\nabla f(x) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x),\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x),\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(x)\right)^\top = (\cos x_2 \cos x_3,\ -x_1 \sin x_2 \cos x_3,\ -x_1 \cos x_2 \sin x_3)^\top$.
$H_f(x) = \left(\frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_j \partial x_i}\right)_{i,j=1,2,3} = \begin{pmatrix} 0 & -\sin x_2 \cos x_3 & -\cos x_2 \sin x_3 \\ -\sin x_2 \cos x_3 & -x_1 \cos x_2 \cos x_3 & x_1 \sin x_2 \sin x_3 \\ -\cos x_2 \sin x_3 & x_1 \sin x_2 \sin x_3 & -x_1 \cos x_2 \cos x_3 \end{pmatrix}$.
Bemerkung: H_f ist eine symmetrische Matrix, da nach dem Satz von Schwarz $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ gilt.

Aufgabe 8: Es gilt für $t \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}
f_{x_1}(0,t) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,t)-f(0,t)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{ht\frac{h^2-t^2}{h^2+t^2}-0}{h} = -t, \\
f_{x_2}(t,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(t,h)-f(t,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{th\frac{t^2-h^2}{t^2+h^2}-0}{h} = +t, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_{x_1}(0,h)-f_{x_1}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{-h-0}{h} = -1, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f_{x_2}(h,0)-f_{x_2}(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{+h-0}{h} = +1.
\end{aligned}$$

Da der Wert der zweiten partiellen Ableitungen von der Reihenfolge der Differentiation abhängig ist, kann f nicht zweimal stetig differenzierbar sein.

Aufgabe 9: Wenn $\nabla f = F$ ist, kann man versuchen durch Integrartion etwa der ersten Komponente bzgl. der Variablen x das Potential f zu bestimmen:

$$f(x,y) = \int (3\cos(x+y) - 3x\sin(x+y))dx = 3x\cos(x+y) + c(y)\,.$$

Dabei muss berücksichtigt werden, dass die Intergationskonstante von y abhängen könnte. Dieser Ausdruck, partiell nach y differenziert, liefert die zweite Komponente,

$$\frac{\partial F}{\partial y} = -3x\sin(x+y) + c'(y) \stackrel{!}{=} -3x\sin(x+y) - \frac{2}{y^3}$$

Damit ergibt sich $c'(y) = -\frac{2}{y^3}$ und somit ist $c(y) = \frac{1}{y^2}$. Für die Funktion f folgt

$$f(x,y) = 3x\cos(x+y) + \frac{1}{y^2}\,.$$

Falls $\nabla g = G$ sein soll, muss gelten:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y,z) = 2y^2 + z^3\cos x, \quad \frac{\partial g}{\partial y}(x,y,z) = 4xy + 1 \quad \text{und} \quad \frac{\partial g}{\partial z}(x,y,z) = 3z^2 \sin x\,.$$

Die drei Bedingungen lieferen drei Darstellungen für die gesuchte Funktion g:

$$\begin{aligned}
g(x,y,z) &= \int (2y^2 + z^3\cos x)dx = 2xy^2 + z^3\sin x + c_1(y,z) \\
g(x,y,z) &= \int (4xy+1)dy = 2xy^2 + y + c_2(x,z) \\
g(x,y,z) &= \int (3z^2\sin x)dz = z^3\sin x + c_3(x,y)\,.
\end{aligned}$$

Setzt man die ersten beiden Bedingungen gleich, so ergibt sich $c_1(y,z) = y$ und $c_2(x,z) = z^3\sin x$. Die Funktion c_3 erhält man durch Gleichsetzen der zweiten und dritten Bedingung. Es folgt $c_3(x,y) = 2xy^2 + y$. Damit ist die gesuchte Funktion $g(x,y,z) = 2xy^2 + z^3\sin x + y$.

Aufgabe 10: a) Eine DGL $p(x,y(x)) + q(x,y(x))y'(x) = 0$ ist exakt, falls $\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x,y)}{\partial x}$ gilt. In unserem Fall ist $p(x,y) = 3x^2y^2 + 2y - 1$ und $q(x,y) = 2x^3y + 2x$ (beachte: in p und q hängt y nicht

mehr von x ab!). Überprüfen der Exaktheit: $\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} = 6x^2y + 2 = \frac{\partial q(x,y)}{\partial x}$. Suche nun Potential f mit $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = p(x,y)$ und $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = q(x,y)$. Integration der ersten Bedingung liefert: $f(x,y) = \int p(x,y)dx = \int(3x^2y^2 + 2y - 1)dx = x^3y^2 + 2xy - x + c(y)$. Partiell differenzieren nach y und anwenden der zweiten Bedingung ergibt: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = 2x^3y + 2x + c'(y) \stackrel{!}{=} q(x,y) = 2x^3y + 2x \Rightarrow c'(y) = 0 \Rightarrow c(y) = \text{const}$. Die allgemeine Lösung muss also der Gleichung $f(x,y) = x^3y^2 + 2xy - x = C$ genügen.
b) $p(x,y) = 2xe^y - 1$, $q(x,y) = x^2e^y + 1$, Überprüfung der Exaktheit: $\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} = 2xe^y = \frac{\partial q(x,y)}{\partial x}$. Konstruktion von f: $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = p(x,y) = 2xe^y - 1$; Integration: $f(x,y) = \int(2xe^y - 1)dx = x^2e^y - x + c(y)$, $\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} = x^2e^y + c'(y) \stackrel{!}{=} q(x,y) = x^2e^y + 1 \Rightarrow c'(y) = 1 \Rightarrow c(y) = y$. Die allgemeine Lösung muss der Gleichung $f(x,y) = x^2e^y - x + y = C$ genügen.