Aufgabe 31: (a) $C : x(t) = (t, t^2, \frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}})^T,\ 0 \le t \le 1 \quad \dot{x}(t) = (1, 2t, 2t^{\frac{1}{2}})^T,\ \|\dot{x}(t)\| = \sqrt{1 + 4t^2 + 4t}$

$L = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + 4t + 4t^2}\ dt = \int\limits_0^1 \sqrt{(1 + 2t)^2}\ dt = \int\limits_0^1 (1 + 2t)\ dt = 2$

(b) Mit der gleichen Parametrisierung wie in (a) finden wir

$$\int\limits_C f\ ds = \int\limits_0^1 f(t)\sqrt{1 + 4t^2 + 4t}\,dt = \int\limits_0^1 f(t)(1 + 2t)\,dt = \int\limits_0^1 \frac{1 + 2t}{1 + 4t + 4t^2}\ dt$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{dt}{1 + 2t} = \frac{1}{2}\ln|1 + 2t|\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\ln 3.$$

Aufgabe 32: zu (a): C_1 besteht aus zwei glatten Kurvenstücken. Wir parametrisieren zunächst das waagrechte Stück W durch $x(t) = (1 + t, 1)^\top,\ t \in [0, 1]$. Nach Definition des "orientieren skalaren Wegintegrals" (Seite 49 Skript) ist

$$\int\limits_W p(v, T)\,dv = \int_0^1 p(x_1(t), x_2(t))\dot{x}_1(t)\,dt = R\int_0^1 \frac{1}{1 + t}\,dt = R\ln(2).$$

Als Parametrisierung für das senkrechte zweite Stück S wählen wir $x(t) = (2, 1 + t)^\top,\ t \in [0, 1]$. Dann ist $\dot{x}(t) = (0, 1)^\top$ und deshalb verschwindet das Integral

$$\int\limits_S p(v, T)\,dv = \int_0^1 p(x_1(t), x_2(t))\underbrace{\dot{x}_1(t)}_{0}\,dt = 0.$$

Somit ist

$$-\int\limits_{C_1} p(v, T)\,dv = -R\,\ln 2.$$

Bei (b) gilt $(v'(\xi), T'(\xi))^\top = (2\xi, 1)^\top$, also ist die erste Komponente des Tangentialvektors der Parametrisierung gleich 2ξ. Somit ist

$$\begin{aligned}-\int\limits_{C_2} p(v, T)\,dv &= -R\int_0^1 \frac{1 + \xi}{1 + \xi^2}\,2\xi\,d\xi = -2R\int_0^1 \left(1 + \frac{\xi}{1 + \xi^2} - \frac{1}{1 + \xi^2}\right)d\xi \\ &= -2R - R\,\ln 2 + \frac{\pi}{2}\,R = -R\left(\ln 2 + 2 - \frac{\pi}{2}\right).\end{aligned}$$

Aufgabe 33: Mit $\dot{\mathbf{x}}(t) = ((-1/2)\,\sin t, (1/2)\,\cos t, 0)^\top$, folgt

$$\begin{aligned}J &= \int\limits_C U(\mathbf{x})\cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} \mathbf{U}(\mathbf{x}(t))\cdot\dot{\mathbf{x}}(t)\,dt \\ &= \int_0^{2\pi}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,\sin t \\ \frac{1}{2}\,(1 + \cos t) \\ 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\,\sin t \\ \frac{1}{2}\cos t \\ 0\end{pmatrix} dt = \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}\,\sin^2 t + \frac{1}{4}\,(\cos t + \cos^2 t)\right)dt \\ &= \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}(1 + \cos t) = \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Aufgabe 34: R: Radius der Planeten; B: Breite der Straße; $b = \frac{B}{2}$; V: Volumen des Abraums

$V = \pi\int\limits_{-b}^{b}(v^2(x) - u^2(x))\ dx$ mit $v(x) = \sqrt{R^2 - x^2}, \quad u(x) = \sqrt{R^2 - b^2}$

(Rotationskörper, Pythagoras)

$V = \pi\int\limits_{-b}^{b}(b^2 - x^2)\ dx = \pi(2b^3 - \frac{1}{3}x^3\big|_{-b}^{b}) = \frac{4}{3}\pi b^3 = \frac{\pi}{6}B^3.$

Das Volumen des Abraums ist unabhängig vom Planetenradius !

Aufgabe 35: Der Kreis wird parametrisiert durch $x(\varphi) = (a + R\,\cos\varphi, 0, R\,\sin\varphi)^\top,\ \varphi \in [0, 2\pi)$. Die Rotation um die x_3 Achse wird beschrieben durch die Matrix

$$\mathbf{R}_3(\vartheta) = \begin{pmatrix}\cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}, \qquad \vartheta \in [0, 2\pi) \qquad \text{(siehe HM I)}.$$

Also ist der Torus gegeben durch

$$y(\varphi,\vartheta) = \mathbf{R}_3(\vartheta)x(\varphi) = \begin{pmatrix} (a + R\,\cos\varphi)\,\cos(\vartheta) \\ (a + R\,\cos\varphi)\,\sin(\vartheta) \\ R\,\sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad \varphi,\vartheta \in [0,2\pi).$$

Der Normalenvektor ergibt sich als

$$\begin{aligned} n(\varphi,\vartheta) &= y_\varphi(\varphi,\vartheta) \times y_\vartheta(\varphi,\vartheta) \\ &= \begin{pmatrix} -R\,\sin\varphi\,\cos\vartheta \\ -R\,\sin\varphi\,\sin\vartheta \\ R\cos\varphi \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -(a + R\,\cos\varphi)\,\sin\vartheta \\ (a + R\,\cos\varphi)\,\cos\vartheta \\ 0 \end{pmatrix} = R\,(a + R\,\cos\varphi) \begin{pmatrix} \cos\varphi\,\cos\vartheta \\ \cos\varphi\,\sin\vartheta \\ \sin\varphi \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit folgt $\|y_\varphi \times y_\vartheta\|_2 = R\,(a + R\cos\varphi)$ und $\nu(\varphi,\vartheta) = (\cos\varphi\,\cos\vartheta, \cos\varphi\,\sin\vartheta, \sin\varphi)^\top$.