Aufgabe 41: Die Astroide, also die von der Kurve C umschlossene Menge $A \subseteq \mathbb{R}^2$, hat den Flächeninhalt

$$\iint\limits_A 1\,\mathrm{d}x = \iint\limits_A \operatorname{div}\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\mathrm{d}x.$$

Mit dem Gauß'schen Satz gilt demnach

$$\iint\limits_A 1\,\mathrm{d}x = \int_C \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}\cdot \nu\, ds = \int_0^{2\pi} x_1(t)\, x_2'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Mit $x_1(t) = 2\cos^3 t$ und $x_2'(t) = 6\sin^2 t\, \cos t$ folgt also

$$\iint\limits_A 1\,\mathrm{d}x = 12\int_0^{2\pi} \cos^4 t\, \sin^2 t\,\mathrm{d}t = 12\int_0^{2\pi} \left(\cos^4 t - \cos^6 t\right)\mathrm{d}t.$$

Für $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ folgt durch partielle Integration mit $u(t) = \cos^{n-1} t$ und $v'(t) = \cos t$ die Gleichung

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos^n t\,\mathrm{d}t &= \left[\cos^{n-1} t\, \sin t\right]_0^{2\pi} + (n-1)\int_0^{2\pi} \cos^{n-2} t\, \sin^2 t\,\mathrm{d}t \\ &= 0 + (n-1)\int_0^{2\pi} \cos^{n-2} t\,\mathrm{d}t - (n-1)\int_0^{2\pi} \cos^n t\,\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

und somit

$$\int_0^{2\pi} \cos^n t\,\mathrm{d}t = \frac{n-1}{n}\int_0^{2\pi} \cos^{n-2} t\,\mathrm{d}t.$$

Diese Formel setzen wir nun mehrfach ein und erhalten

$$\iint\limits_A 1\,\mathrm{d}x = 12\int_0^{2\pi} \left(\cos^4 t - \cos^6 t\right)\mathrm{d}t = 2\int_0^{2\pi} \cos^4 t\,\mathrm{d}t = \frac{3}{2}\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = \frac{3}{4}\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = \frac{3}{2}\pi.$$

Aufgabe 42: Der Gaußsche Satz braucht zunächst einmal ein Vektorfeld, auf das man die Divergenz loslassen kann. Es sei $e^{(j)}$ der kanonischen Einheitsvektor des $\mathbb{R}^3$. Dann definieren wir ein Vektorfeld durch

$$F(x) := f(x)g(x)e^{(j)}, \qquad j = 1, 2, 3.$$

Dann ist div $F(x) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial F_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}(fg)(x) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)\, g(x) + f(x)\frac{\partial g}{\partial x_j}(x)$. Außerdem gilt für $x \in \partial K$

$$F(x)\cdot \nu(x) = f(x)g(x)e^{(j)}\cdot \nu(x) = f(x)g(x)\left(e^{(j)}\cdot \nu(x)\right) = f(x)g(x)\nu_j(x),$$

mit der $j$ten Komponente vom Normaleneinheitsvektor $\nu(x)$, $j = 1, 2, 3$. Der Gaußsche Satz liefert nun

$$\begin{aligned}\iiint_K \frac{\partial f}{\partial x_j} g\, dx + \iiint_K f\frac{\partial g}{\partial x_j}\, dx &= \iiint_K \operatorname{div} F(x)\, dx \\ &= \iint_{\partial K} F(x)\cdot \nu(x)\, do = \iint_{\partial K} f(x)g(x)\nu_j(x)\, do,\end{aligned}$$

und das war zu zeigen.
Damit man den Gaußschen Satz aus der Vorlesung anwenden kann, müssen f und g stetig differenzierbare Funktionen sein und der Rand von K muß stückweise glatt sein.

Aufgabe 43: Zunächst muss man F vollständig durch die neuen Koordinaten ausdrücken. Die Einheitsvektoren in Zylinderkoordinaten sind (siehe Herleitung in der Übung)

$$\mathbf{e}_r = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{e}_z = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die kartesischen Einheitsvektoren können durch die zylindrischen Einheitsvektoren wie folgt ausgedrückt werden (leichte Rechnung),

$$\mathbf{e}_x = \mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \cos\varphi\mathbf{e}_r - \sin\varphi\mathbf{e}_\phi, \qquad \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \sin\varphi\mathbf{e}_r + \cos\varphi\mathbf{e}_\phi.$$

Setze nun $\hat{F}(r,\varphi,z) = F(x(r,\varphi,z))$. Damit folgt

$$\hat{F}(r,\varphi,z) = \begin{pmatrix} zr\sin\varphi \\ r^2\cos^2\varphi \\ 1 \end{pmatrix} = (zr\sin\varphi)\mathbf{e}_x + (r^2\cos^2\varphi)\mathbf{e}_y + 1\,\mathbf{e}_z.$$

Wir nutzen die Umrechnungsformel von zylindrische in karthesische Einheitsvektoren von oben und finden

$$\hat{F}(r,\varphi,z) = (zr\sin\varphi\cos\varphi + r^2\cos^2\varphi\sin\varphi)\,\mathbf{e}_r + (r^2\cos^3\varphi - zr\sin^2\varphi)\,\mathbf{e}_\varphi + \mathbf{e}_z.$$

Nun folgt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} F &= \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\hat{F}_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial \hat{F}_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial \hat{F}_z}{\partial z} = \frac{1}{r}\left(2zr\sin\varphi\cos\varphi + 3r^2\cos^2\varphi\sin\varphi\right) \\
&\quad + \frac{1}{r}\left(-3r^2\cos^2\varphi\sin\varphi - 2zr\sin\varphi\cos\varphi\right) = 0, \\
\operatorname{rot} F &= \left(\frac{1}{r}\frac{\partial \hat{F}_z}{\partial\varphi} - \frac{\partial \hat{F}_\varphi}{\partial z}\right)\mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial \hat{F}_r}{\partial z} - \frac{\partial \hat{F}_z}{\partial r}\right)\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial(r\,\hat{F}_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial \hat{F}_r}{\partial\varphi}\right)\mathbf{e}_z \\
&= r\sin^2\varphi\,\mathbf{e}_r + r\sin\varphi\cos\varphi\,\mathbf{e}_\varphi + \frac{1}{r}\big[3r^2\cos^3\varphi - 2zr\sin^2\varphi - zr(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) \\
&\quad -r^2\cos^3\varphi + 2r^2\cos\varphi\sin^2\varphi\big]\,\mathbf{e}_z \\
&= \begin{pmatrix} r\sin^2\cos\varphi \\ r\sin^3\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r\sin^2\varphi\cos\varphi \\ r\sin\varphi\cos^2\varphi \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2r\cos\varphi - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r\sin\varphi \\ 2r\cos\varphi - z \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 44: Zunächst zeigen wir, dass $\operatorname{rot}(aX) = a\operatorname{rot}(X) - X \times \nabla a$: Wenn wir mit $(aX)_j$ die j-te Koordinate von aX bezeichnen, dann ist

$$\operatorname{rot}(aX) = \begin{pmatrix} \frac{\partial(aX)_3}{\partial x_2} - \frac{\partial(aX)_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial(aX)_1}{\partial(aX)_3} - \frac{\partial(aX)_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial(aX)_2}{\partial x_1} - \frac{\partial(aX)_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \overset{\text{Kettenregel}}{=} \begin{pmatrix} a\frac{\partial X_3}{\partial x_2} + X_3\frac{\partial a}{\partial x_2} - a\frac{\partial X_2}{\partial x_3} - X_2\frac{\partial a}{\partial x_3} \\ a\frac{\partial X_1}{\partial X_3} + X_1\frac{\partial a}{\partial x_3} - a\frac{\partial X_3}{\partial x_1} - X_3\frac{\partial a}{\partial x_1} \\ a\frac{\partial X_2}{\partial x_1} + X_2\frac{\partial a}{\partial x_1} - a\frac{\partial X_1}{\partial x_2} - X_1\frac{\partial a}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

$$= a\begin{pmatrix} \frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial X_1}{\partial X_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial X_2}{\partial x_1} - \frac{\partial X_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_3\frac{\partial a}{\partial x_2} - X_2\frac{\partial a}{\partial x_3} \\ X_1\frac{\partial a}{\partial x_3} - X_3\frac{\partial a}{\partial x_1} \\ X_2\frac{\partial a}{\partial x_1} - X_1\frac{\partial a}{\partial x_2} \end{pmatrix} = a\cdot\operatorname{rot}X + \nabla a \times X = a\cdot\operatorname{rot}X - X \times \nabla(a).$$

Außerdem gilt (Index j meint im Folgenden die $j$te Komponente eines Vektorfelds)

$$\begin{aligned}
\operatorname{div}(X \times Y) = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial(X\times Y)_j}{\partial x_j} &= \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\begin{pmatrix} X_2Y_3 - X_3Y_2 \\ X_3Y_1 - X_1Y_3 \\ X_1Y_2 - X_2Y_1 \end{pmatrix}_j \\
&= \frac{\partial X_2}{\partial x_1}Y_3 + X_2\frac{\partial Y_3}{\partial x_1} - Y_2\frac{\partial X_3}{\partial x_1} - X_3\frac{\partial Y_2}{\partial x_1} \\
&\quad + \frac{\partial X_3}{\partial x_2}Y_1 + X_3\frac{\partial Y_1}{\partial x_2} - X_1\frac{\partial Y_3}{\partial x_2} - Y_3\frac{\partial X_1}{\partial x_2} \\
&\quad + \frac{\partial X_1}{\partial x_3}Y_2 + X_1\frac{\partial Y_2}{\partial x_3} - X_2\frac{\partial Y_1}{\partial x_3} - Y_1\frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\
&= Y_1\left(\frac{\partial X_3}{\partial x_2} - \frac{\partial X_2}{\partial x_3}\right) + Y_2\left(\frac{\partial X_1}{\partial x_3} - \frac{\partial X_3}{\partial x_1}\right) + X_2\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1}Y_3 - Y_3\frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right) \\
&\quad + X_1\left(\frac{\partial Y_2}{\partial x_3} - \frac{\partial Y_3}{\partial x_2}\right) + X_2\left(\frac{\partial Y_3}{\partial x_1} - \frac{\partial Y_1}{\partial x_3}\right) + X_3\left(X_3\frac{\partial Y_1}{\partial x_2} - \frac{\partial Y_2}{\partial x_1}\right) \\
&= Y\cdot\operatorname{rot}(X) - X\cdot\operatorname{rot}(Y)
\end{aligned}$$

Schließlich ist

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot} U = \operatorname{rot}\begin{pmatrix} \frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right) - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_1}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right) - \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial U_2}{\partial x_1} - \frac{\partial U_1}{\partial x_2}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_3} - \frac{\partial U_3}{\partial x_1}\right) - \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial U_3}{\partial x_2} - \frac{\partial U_2}{\partial x_3}\right) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} - \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_3^2} - \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1 \partial x_3} - \frac{\partial^2 U_3}{\partial^2 x_1} - \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2 \partial x_3} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U_1}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U_2}{\partial x_3^2} \\ \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 U_3}{\partial x_3^2} \end{pmatrix}$$

$$= \nabla\left(\frac{\partial U_1}{\partial x_1} + \frac{\partial U_2}{\partial x_2} + \frac{\partial U_3}{\partial x_3}\right) - (\Delta U_1, \Delta U_2, \Delta U_3)^\top = \nabla \operatorname{div} U - \Delta U.$$

Aufgabe 45: F ist auf $\mathbb{R}^3$ stetig differenzierbar und $\mathbb{R}^3$ ist einfach zusammenhängend. Damit gilt $\operatorname{rot} F = 0$ ist äquivalent dazu, dass ein Potential $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \nabla f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}^3$ existiert.. Zu betrachten ist also

$$\operatorname{rot} F = \begin{pmatrix} b-a \\ 0-0 \\ x_1 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b-a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \overset{!}{=} 0$$

Die Bedingung ist erfüllt für $b = a$, also für

$$F = \begin{pmatrix} x_1^2 + x_1 x_2 \\ x_1^2/2 + x_2 + a x_3 \\ a x_2 \end{pmatrix}.$$

Durch Integration ergeben sich aus

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1} &= x_1^2 + x_1 x_2 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} &= x_1^2/2 + x_2 + a x_3 \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} &= a x_2 \end{aligned}$$

die Gleichungen

$$\begin{aligned} f &= \tfrac{x_1^3}{3} + \tfrac{x_1^2}{2} x_2 + h_1(x_2, x_3) \\ f &= \tfrac{x_1^2}{2} x_2 + \tfrac{x_2^2}{2} + a x_2 x_3 + h_2(x_1, x_3) \\ f &= a x_2 x_3 + h_3(x_1, x_2) \end{aligned}$$

mit noch zu bestimmenden Funktionen h_1, h_2, h_3. Mit einiger Rechnung (z.B. Ableiten nach einzelnen Variablen und Gleichsetzen) ergibt sich $h_1(x_2, x_3) = a x_2 x_3 + \frac{x_2^2}{2}$, $h_2(x_1, x_3) = \frac{x_1^3}{3}$ und $h_3(x_1, x_2) = \frac{x_1^3}{3} + \frac{x_1^2}{2} x_2 + \frac{x_2^2}{2}$ und so erhalten wir das Potential $f = \frac{x_1^3}{3} + \frac{x_1^2}{2} x_2 + \frac{x_2^2}{2} + a x_2 x_3$.
Die Rotation des Feldes F ist für diese Wahl von a und b natürlich Null - wir haben b ja gerade so gewählt, dass F ein Potential hat. Da eine (stetig differenzierbare) Funktion genau dann rotationsfrei ist, wenn sie ein Potential hat, muß F also rotationsfrei sein, $\operatorname{rot} F = 0$.