Hans-Jürgen Freisinger

Die Theorie der Wiener-Hopf-Integralgleichung

Vortrag im Seminar „Intergralgleichungen" am 22. Januar 2007

1 Grundlegende Eigenschaften der Fouriertransformation

In diesem Kapitel wollen wir einige Grundeigenschaften der Fouriertransformation wiederholen. Für die Beweise verweisen wir auf die Literatur, z.B. auf Yitzhak Katznelson, An Introduction to Harmonic Analysis, Cambridge University Press, 2004, oder auf die Vorlesung „Intergralgleichungen" von Herrn Dr. T. Arens aus dem SS 2005.

1.1 Definition und Lemma.
Die *Fouriertransformierte* der Funktion $x \in L^1(\mathbb{R})$ ist definiert durch

$$\hat{x}(t) := (\mathcal{F}x)(t) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{ist} x(s) ds \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{1.1}$$

Durch (1.1) wird ein linearer und beschränkter Operator $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow BC(\mathbb{R})$ erklärt.

Beweis: Das Integral in (1.1) existiert nach dem Majorantenkriterium. Es gilt für alle $t \in \mathbb{R}$:

$$\|\hat{x}\| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |x(s)| ds = \|x\|_{L^1}. \tag{1.2}$$

Also ist $\hat{x}$ beschränkt. Die Stetigkeit von $\hat{x}$ liefert ein allgemeiner Satz der Lebesgueschen Integrationstheorie. Aus (1.2) folgt ferner $\|\mathcal{F}\| \leq 1$. $\square$

Wir benötigen noch den Begriff der Faltung zweier Funktionen aus $L^1(\mathbb{R})$:

1.2 Satz und Definition.
Es seien $x, y \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt für fast alle $t \in \mathbb{R}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t-s)y(s)| ds < \infty.$$

Für diese t sei nun

$$\varphi(t) := \int_{-\infty}^{\infty} x(t-s)y(s) ds.$$

Dann ist $\varphi \in L^1(\mathbb{R})$ und

$$\|\varphi\|_{L^1} \leq \|x\|_{L^1} \|y\|_{L^1}.$$

φ heißt *Faltung* von x und y und wird mit $\varphi =: x * y$ bezeichnet.

1.3 Der Schwartzraum.
Der lineare Raum

$$\mathcal{S} := \left\{ x \in C^\infty(\mathbb{R}) : \forall p, q \in \mathbb{N}_0 : \sup_{t \in \mathbb{R}} \left(|t|^p |x^{(q)}(t)| \right) < \infty \right\}$$

heißt *Schwartz-Raum* (oder *Raum der schnell abfallenden Funktionen*). $\mathcal{S}$ ist eine dichte Teilmenge von $L^1(\mathbb{R})$.

1.4 Fourier-Umkehrformel in $\mathcal{S}$.
Ist $x \in \mathcal{S}$, so ist auch $\hat{x} \in \mathcal{S}$ und es gilt die Umkehrformel

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ist} \hat{x}(s) ds \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

$\mathcal{F} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$ ist somit ein Isomorphismus des Vektorraumes $\mathcal{S}$ auf sich. Ferner gilt die *Formel von Plancherel*:

$$\langle \mathcal{F}x, \mathcal{F}y \rangle_2 = 2\pi \langle x, y \rangle_2 \qquad \text{für alle } x, y \in \mathcal{S}.$$

Daher ist $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathcal{F}$ ein unitärer Normisomorphismus des Prä-Hilbertraumes $(\mathcal{S}, \langle \cdot, \cdot \rangle_2)$ auf sich.

1.5 Faltungsformel.
Für alle $x, y \in L^1(\mathbb{R})$ gilt: $\quad \mathcal{F}(x * y) = (\mathcal{F}x)(\mathcal{F}y)$.

1.6 Satz.
Die Fouriertransformation $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow BC(\mathbb{R})$ ist injektiv, d.h. für $x \in L^1(\mathbb{R})$ gilt: $\hat{x} = 0 \Longrightarrow x = 0$.

Eine noch stärkere Aussage über das Bild der Fouriertransformation liefert das folgende

1.7 Lemma von Riemann-Lebesgue.
Für jedes $x \in L^1(\mathbb{R})$ ist $\lim_{t \to \pm\infty} \hat{x}(t) = 0$, d.h. $\mathcal{F}(L^1(\mathbb{R})) \subseteq C_0(\mathbb{R})$.

2 Die Wieneralgebra

2.1 Definition.
Es sei $\mathcal{A}$ ein Vektorraum (hier) über $\mathbb{C}$ und $\cdot$ eine multiplikative Verknüpfung auf $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ heißt *Algebra*, wenn für alle $x, y, z \in \mathcal{A}$ und alle $\alpha \in \mathbb{C}$ die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

(i) *Assoziativität:* $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$,

(ii) *Distributivität:* $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$ und $z \cdot (x + y) = z \cdot x + z \cdot y$,

(iii) *Homogenität:* $\alpha(x \cdot y) = \alpha(x \cdot y) = x \cdot (\alpha y)$.

Ist $\mathcal{A}$ eine Algebra, so heißt $\mathcal{A}$

- *kommutativ*, wenn $x \cdot y = y \cdot x$ für alle $x, y \in \mathcal{A}$ gilt,
- *Algebra mit Eins*, wenn es ein sog. Einselement $e \in \mathcal{A}$ gibt mit $x \cdot e = e \cdot x = x$ für alle $x \in \mathcal{A}$,
- *normiert*, wenn $\mathcal{A}$ ein normierter Raum ist und zusätzlich $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \, \|y\|$ für alle $x, y \in \mathcal{A}$ gilt,
- *Banachalgebra*, wenn $\mathcal{A}$ ein Banachraum ist.

2.2 Beispiele.

a) $\mathbb{C}^{n \times n}$ mit der Matrizenmultiplikation und einer beliebigen Matrixnorm ist eine (nicht-kommutative) Banachalgebra mit Eins.

b) Ist X ein normierter Raum, so ist der Raum $\mathcal{L}(X)$ mit der Komposition von Abbildungen und der Operatornorm eine normierte Algebra mit Eins. Ist X sogar ein Banachraum, so ist $\mathcal{L}(X)$ eine Banachalgebra.

c) Der Raum $BC(\mathbb{R})$ versehen mit der punktweisen Multiplikation und der Supremumsnorm ist eine kommutative Banachalgebra mit Eins (nämlich der konstanten Funktion $\mathbf{1}$).

d) Der Raum $C_0(\mathbb{R})$ versehen mit der punktweisen Multiplikation und der Supremumsnorm ist eine kommutative Banachalgebra **ohne** Eins, da die konstante Funktion $\mathbf{1}$ nicht in $C_0(\mathbb{R})$ liegt.

e) Der Raum $L^1(\mathbb{R})$ versehen mit der Faltung ist nach 1.2 eine kommutative Banachalgebra **ohne** Eins.
Letzteres sieht man z.B. so: hätte man ein Element $e \in L^1(\mathbb{R})$ mit $e * x = x$ für alle $x \in L^1(\mathbb{R})$, so wäre auch $e * e = e$, also nach 1.5 $\hat{e} = \hat{e}\hat{e}$ und damit $\hat{e} \equiv 0$ oder $\hat{e} \equiv 1$ auf $\mathbb{R}$. Nach 1.7 (Lemma von Riemann-Lebesgue) ist $\hat{e} \equiv 0$ auf $\mathbb{R}$ also $\hat{e} = 0$ und somit nach 1.6 $e = 0$. Ein Widerspruch!

Nun wollen wir noch zwei aus der linearen Algebra oder der Numerik bekannte Begriffe für Banachalgebren verallgemeinern:

2.3 Definition.
Es sei $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra mit Einselement e und $x \in \mathcal{A}$.

a) x heißt *regulär*, wenn x ein sog. inverses Element x^{-1} besitzt, für das gilt: $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = e$.

b) x heißt *singulär*, wenn x nicht regulär ist.

c) Die Menge
$$\sigma(x) := \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda e \text{ ist singulär}\}$$
heißt das *Spektrum* von x. Es ist eine kompakte (d.h. abgeschlossene und beschränkte) Teilmenge von $\mathbb{C}$.

d) Die Zahl
$$r(x) := \limsup_{n\to\infty} \|x^n\|^{1/n} \geq 0$$
heißt der *Spektralradius* von x. Man kann zeigen, dass $r(x) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(x)\}$ gilt.

2.4 Die Banachalgebra $L^1_\delta(\mathbb{R})$.
In 2.2 e) haben wir gesehen, dass die Banachalgebra $L^1(\mathbb{R})$ kein Einselement besitzt. Für die Behandlung von Faltungsintegralgleichungen der Form

$$\lambda x(t) - \int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)x(s)ds = y(t), \qquad t \in \mathbb{R}, \tag{2.1}$$

ist es aber von Nutzen, ein solches Element zu besitzen. Wir werden die Algebra daher um ein Objekt δ erweitern, das später unser Einselement werden soll. Die Bezeichnung δ soll dabei an die Dirac'sche Deltadistribution erinnern. Wir betrachten nun also den Raum

$$L^1_\delta(\mathbb{R}) := [L^1(\mathbb{R}), \delta] = \{x + \alpha\delta : x \in L^1(\mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{C}\},$$

und definieren auf L^1_δ die folgenden Operationen:

$$\begin{aligned}
(x + \alpha\delta) + (y + \beta\delta) &:= (x + y) + (\alpha + \beta)\delta,\\
\lambda(x + \alpha\delta) &:= \lambda x + (\lambda\alpha)\delta,\\
(x + \alpha\delta) * (y + \beta\delta) &:= (x * y + \alpha y + \beta x) + (\alpha\beta)\delta,
\end{aligned}$$

und die Norm
$$\|x + \alpha\delta\|_{L^1_\delta} := \|x\|_{L^1} + |\alpha|.$$

Man zeigt leicht, dass $L^1_\delta(\mathbb{R})$ so zu einer kommutativen Banachalgebra mit dem Einselement δ wird, die $L^1(\mathbb{R})$ als abgeschlossene Teilalgebra enthält.

Die Elemente von $L^1_\delta(\mathbb{R})$ wollen wir meist mit Großbuchstaben bezeichnen, etwa in der Form $X = x + \alpha\delta \in L^1_\delta(\mathbb{R})$.

Wir können die Integralgleichung (2.1) nun in der Form $\lambda x - k * x = y \Longleftrightarrow (\lambda\delta - k) * x = y$ schreiben und erhalten mit $K := \lambda\delta - k$ daraus die Gleichung $K * X = Y$ in $L^1_\delta(\mathbb{R})$. Wir haben nun zu untersuchen, wann das Element $K \in L^1_\delta(\mathbb{R})$ regulär ist. Dazu müssen wir zunächst noch die Fouriertransformation $\mathcal{F}$ auf $L^1_\delta(\mathbb{R})$ fortsetzen: dazu setzen wir

$$\mathcal{F}(x + \alpha\delta) := \hat{x} + \alpha\mathbf{1} \qquad \text{für } x \in L^1(\mathbb{R}) \text{ und } \alpha \in \mathbb{C}.$$

Man rechnet leicht nach, dass $\mathcal{F}(X * Y) = (\mathcal{F}X)(\mathcal{F}Y)$ für alle $X, Y \in L^1_\delta(\mathbb{R})$ und $\mathcal{F}\delta = 1$ gilt.

Das Bild von $L^1_\delta(\mathbb{R})$ unter $\mathcal{F}$ ist eine Teilalgebra von $BC(\mathbb{R})$ und heißt *Wieneralgebra*.

Die oben aufgeworfene Frage nach der Regularität von K beantwortet nun der folgende

2.5 Satz von Wiener.

Es seien $k \in L^1(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C}$ und $K = \lambda\delta - k \in L^1_\delta(\mathbb{R})$. Dann gilt:

$$K \text{ ist regulär in } L^1_\delta(\mathbb{R}) \iff \lambda \neq 0 \text{ und } \lambda \notin \hat{k}(\mathbb{R}).$$

In diesem Fall ist die Inverse von K gegeben durch

$$K^{-1} = \frac{1}{\lambda}(\delta + k_\lambda) \quad \text{mit} \quad \hat{k}_\lambda(t) = \frac{\hat{k}(t)}{\lambda - \hat{k}(t)} \ (t \in \mathbb{R}).$$

Dabei ist insbesondere $\hat{k}_\lambda \in \mathcal{F}(L^1(\mathbb{R}))$.

Beweis: vgl. Jörgens, Lineare Ingeraloperatoren, Teubner, 1970 oder Vorlesung Integralgleichungen vom SS 2006. $\square$

Wir werden im Kapitel 3 besonders vom folgenden Korollar Gebrauch machen:

2.6 Korollar.

Sei $k \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt: $\sigma(k) = \{\hat{k}(t) : t \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}$.

Das Spektum von k ist also die die Spur einer geschlossenen Kurve in $\mathbb{C}$ mit dem Ursprung als Anfangs- und Endpunkt! Insbesondere ist das Spektrum nicht abzählbar, so dass der Integraloperator $K : L^1(R) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}), Kx(t) := \int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)x(s)ds$ nicht kompakt sein kann.

3 Die Wiener-Hopf-Integralgleichung

Wir kommen nun also endlich zum Kern dieses Vortrages, den die Integralgleichung

$$\lambda x(t) - \int_0^\infty k(t-s)x(s)ds = y(t) \qquad (t > 0) \tag{3.1}$$

bildet, wobei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und $k \in L^1(\mathbb{R})$ gegeben sind. Im Gegensatz zu (2.1) suchen wir nur noch Lösungen über der positiven reellen Halbachse.
Zunächst definieren wir die folgenden linearen Räume:

$$\begin{aligned} L^1(\mathbb{R}^+) &:= \{z \in L^1(\mathbb{R}) : z(t) = 0 \text{ für fast alle } t < 0\}, \\ L^1(\mathbb{R}^-) &:= \{z \in L^1(\mathbb{R}) : z(t) = 0 \text{ für fast alle } t > 0\}, \\ L^1_\delta(\mathbb{R}^\pm) &:= \{z + \alpha\delta : z \in L^1(\mathbb{R}^\pm), \alpha \in \mathbb{C}\}. \end{aligned}$$

Die Räume $L^1(\mathbb{R}^\pm)$ sind normisomorph zu den bekannten Raumen $L^1((0,\infty))$ bzw. $L^1((-\infty,0))$; z.B. ist $L^1(\mathbb{R}^+) \ni f \mapsto f|_{(0,\infty)} \in L^1(0,\infty)$ ein Normisomorphismus. Ferner sind die Räume $L^1(\mathbb{R}^\pm)$ abgeschlossene Teilmengen von $L^1(\mathbb{R})$.

3.1 Proposition.

a) Die Räume $L^1(\mathbb{R}^\pm)$ sind abgeschlossene Teilalgebren von $L^1(\mathbb{R})$, d.h. abgeschlossene Teilräume mit der zusätzlichen Eigenschaft

$$x, y \in L^1(\mathbb{R}^\pm) \Longrightarrow x * y \in L^1(\mathbb{R}^\pm).$$

b) Es gilt $L^1(\mathbb{R}) = L^1(\mathbb{R}^-) \oplus L^1(\mathbb{R}^+)$.
Ferner sind die Projektionen $P^\pm : L^1(\mathbb{R}) \longrightarrow L^1(\mathbb{R}^\pm)$ gegeben durch

$$P^+x(t) = \begin{cases} x(t) & \text{für } t \geq 0, \\ 0 & \text{für } t < 0, \end{cases} \qquad P^-x(t) = \begin{cases} x(t) & \text{für } t \leq 0, \\ 0 & \text{für } t > 0, \end{cases}$$

und es gilt $P^\pm \in \mathcal{L}(L^1(\mathbb{R}))$.

c) Die Räume $L^1_\delta(\mathbb{R}^\pm)$ sind abgeschlossene Teilalgebren von $L^1_\delta(\mathbb{R})$. Insbesondere gilt$X, Y \in L^1_\delta(\mathbb{R}^\pm) \Longrightarrow X * Y \in L^1_\delta(\mathbb{R}^\pm)$ und $X \in L^1_\delta(\mathbb{R}^\pm), y \in L^1(\mathbb{R}^\pm) \Longrightarrow X * y \in L^1(\mathbb{R}^\pm)$.

d) Die Projektionen $P^\pm$ werden vermöge

$$P^\pm(x + \alpha\delta) := P^\pm x + \alpha\delta \qquad (x \in L^1(\mathbb{R}^\pm), \alpha \in \mathbb{C})$$

zu Projektionen $L^1_\delta(\mathbb{R}) \longrightarrow L^1_\delta(\mathbb{R}^\pm)$ fortgesetzt. Es gilt für alle $X_- \in L^1_\delta(\mathbb{R}^-)$ und alle $Y \in L^1_\delta(\mathbb{R})$:

$$P^+(X_- * P^+Y) = P^+(X_- * Y). \tag{3.2}$$

Beweis: a) Die Abgeschlossenheit und die Teilraumeigenschaft sind klar. Sind ferner $x, y \in L^1(\mathbb{R}^+)$, so gilt für alle $t < 0$

$$(x * y)(t) = \int_0^\infty x(s)y(\underbrace{t-s}_{<0})ds = 0,$$

und somit $x * y \in L^1(\mathbb{R}^+)$.

b) Es ist $L^1(\mathbb{R}^+) \cap L^1(\mathbb{R}^-) = \{\mathbf{0}_{L^1(\mathbb{R})}\}$ und somit ist die Summe der Teilräume direkt. Wegen $P^+ + P^- = I$ erhalten wir weiterhin die Darstellung der Projektionen.

c) Abgeschlossenheit und Teilraumeigenschaft folgen aus a) und wir erhalten für $X = x + \alpha\delta \in L^1_\delta(\mathbb{R}^+)$ und $Y = y + \beta\delta \in L^1_\delta(\mathbb{R}^+)$: $X * Y = x * y + \alpha y + \beta x + (\alpha\beta)\delta \in L^1_\delta(\mathbb{R}^+)$.

d) Es seien zunächst $x_- \in L^1(\mathbb{R}^-)$ und $y \in L^1(\mathbb{R})$. Dann gilt für alle $t > 0$:

$$(x_- * P^+y)(t) = \int_{-\infty}^0 x_-(s)P^+y(\underbrace{t-s}_{>0})ds \overset{\text{b)}}{=} \int_{-\infty}^0 x_-(s)y(t-s)ds = (x_- * y)(t) \tag{3.3}$$

Damit folgt nun für $X_- = \alpha\delta + x_- \in L^1_\delta(\mathbb{R}^-)$ und $Y = \beta\delta + y \in L^1_\delta(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} X_- * P^+Y &= (x_- + \alpha\delta) * (P^+y + \beta\delta) = x_- * P^+y + \alpha P^+y + \beta x_- + (\alpha\beta)\delta \\ &\overset{(3.3)}{=} x_- * y + \alpha P^+y + \beta x_- + (\alpha\beta)\delta \end{aligned}$$

und somit

$$\begin{aligned} P^+(X_- * P^+Y) &= P^+(x_- * y) + \alpha P^+y + \alpha\beta = P^+(x_- * y + \alpha y + \beta x_- + (\alpha\beta)\delta) \\ &= P^+(X_- * Y). \qquad \square \end{aligned}$$

Bemerkung. Es sei $X \in L^1_\delta(\mathbb{R}^\pm)$ regulär in $L^1_\delta(\mathbb{R})$. Wir werden später sehen, dass dann die Inverse X^{-1} im Allgemeinen *nicht* in $L^1_\delta(\mathbb{R}^\pm)$ liegt.

Jetzt zu unserer Integralgleichung (3.1). Dort sei nun $y \in L^1(\mathbb{R}^+)$. Wir schreiben (3.1) in eine Faltungsgleichung um und suchen $x \in L^1(\mathbb{R}^+)$ mit

$$\lambda x - k * x = y. \tag{3.4}$$

Wenden wir auf beiden Seiten von (3.4) den Operator P^+ an, so ergeben sich die äquivalenten Identitäten

$$\lambda P^+x - P^+(k * x) = P^+y \iff \lambda x - P^+(k * x) = y, \tag{3.5}$$

und mit 3.1 b) erhalten wir schließlich noch

$$\lambda x - k * x = y - P^-(k * x). \tag{3.6}$$

Die grundlegende **Idee** zur Lösung der Integralgleichung ist nun die: wenn es uns gelingt eine Faktorisierung der Form

$$\lambda\delta - k = a_+ * a_- \tag{3.7}$$

zu finden mit $a_+, a_+^{-1} \in L^1_\delta(\mathbb{R}^+)$ und $a_-, a_-^{-1} \in L^1_\delta(\mathbb{R}^-)$, so erhalten wir die zu (3.6) äquivalente Gleichung

$$a_+ * a_- * x = y - P^-(k * x). \tag{3.8}$$

3.2 Proposition.
Es sei $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ und es existiere eine Zerlegung gemäß (3.7). Dann gibt es zu jedem $y \in L^1(\mathbb{R}^+)$ genau eine Lösung $x \in L^1(\mathbb{R}^+)$ der Gleichung (3.4), nämlich

$$x = a_+^{-1} * P^+(a_-^{-1} * y).$$

Beweis: Ist $x \in L^1(\mathbb{R}^+)$ eine Lösung von (3.4), so auch von (3.8). Durch Anwendung der Projektion P^+ erhalten wir

$$P^+(a_+ * x) = P^+[a_-^{-1} * y - a_-^{-1} * P^-(k * x)],$$

also $a_+ * x = P^+(a_-^{-1} * y)$ und damit die behauptete Darstellung.
Nun sei umgekehrt $x := a_+^{-1} * P^+(a_-^{-1} * y) \in L^1(\mathbb{R}^+)$; wir zeigen, dass x (3.5) erfüllt. Es gilt:

$$\begin{aligned}\lambda x - P^+(k * x) &= P^+(\lambda x - k * x) = P^+((\lambda\delta - k) * x) \overset{(3.7)}{=} P^+(a_+ * a_- * x) \\ &= P^+[a_+ * a_- * a_+^{-1} * P^+(a_-^{-1} * y)] = P^+[a_- * P^+(a_-^{-1} * y)] \\ &= P^+[a_- * P^+(a_-^{-1} * y)] \overset{(3.2)}{=} P^+(a_- * a_-^{-1} * y) = P^+y = y. \qquad \square\end{aligned}$$

Wir werden nun für den Rest dieses Vortrages die Frage zu klären haben, wann ein Element $A \in L^1_\delta(\mathbb{R})$ eine Zerlegung $A = A_+ * A_-$ besitzt mit $A_+, A_+^{-1} \in L^1_\delta(\mathbb{R}^+)$ und $A_-, A_-^{-1} \in L^1_\delta(\mathbb{R}^-)$. Dafür werden wir die Exponoentialfunktion und den Logarithmus benötigen:

3.3 Definition und Lemma.
Es sei $X \in L^1_\delta(\mathbb{R})$ und $X^n := \underbrace{X * \ldots * X}_{n\text{-mal}}$. Dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!} X^n$ in $X \in L^1_\delta(\mathbb{R})$ und wir definieren die Exponentialfunktion durch

$$e^X := \exp(X) := \delta + \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n!} X^n \in L^1_\delta(\mathbb{R}).$$

Dann gilt:

a) $(\mathcal{F}e^X)(t) = e^{\mathcal{F}X(t)} \quad (t \in \mathbb{R})$.

b) $e^0 = \delta$ und $e^{X+Y} = e^X * e^Y$ $(X, Y \in L^1_\delta(\mathbb{R}))$.

c) e^X ist regulär mit der Inversen e^{-X}.

d) $X \in L^1_\delta(\mathbb{R}^\pm) \Longrightarrow e^X \in L^1_\delta(\mathbb{R}^\pm)$.

Beweis: Für $X = x + \alpha\delta \in L^1_\delta(\mathbb{R})$ und $N \in \mathbb{N}$ gilt

$$\left\| \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} X^n \right\|_{L^1_\delta} \leq \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} \|x + \alpha\delta\|^n_{L^1_\delta} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n!} \left(\|x\|_{L^1} + |\alpha|\right)^n,$$

so dass uns das Majorantenkriterium die Konvergenz der Reihe liefert.
a) Die Vertauschung mit der Fouriertransformation folgt aus

$$\left[\mathcal{F}(\delta + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} X^n)\right](t) = \left[\mathbf{1} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} \mathcal{F}(X^n)\right](t) = 1 + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n!} \mathcal{F}[X(t)]^n$$

für alle $t \in \mathbb{R}$ und dem Grenzübergang $N \to \infty$.
b) $e^0 = \delta$ ist klar und für alle $X, Y \in L^1_\delta(\mathbb{R})$ und alle $t \in \mathbb{R}$ gilt:

$$[\mathcal{F}(e^X * e^Y)](t) = [(\mathcal{F}e^X)(\mathcal{F}e^Y)](t) \overset{\text{a)}}{=} e^{\mathcal{F}X(t)} e^{\mathcal{F}Y(t)} = e^{\mathcal{F}(X+Y)(t)} \overset{\text{a)}}{=} \mathcal{F}e^{X+Y}(t),$$

also nach 1.6 $e^X * e^Y = e^{X+Y}$.
c) $\delta \overset{\text{b)}}{=} e^0 = e^{X-X} \overset{\text{b)}}{=} e^X * e^{-X} (X \in L^1_\delta(\mathbb{R}))$.
d) folgt sofort aus 3.1c). $\square$

Nach 2.6 ist das Spektrum der Funktion $k \in L^1(\mathbb{R})$ gegeben durch $\sigma(k) = \{\hat{k}(t) : t \in \mathbb{R}\} \cup \{0\}$ und damit die Spur einer geschlossenen Kurve in $\mathbb{C}$. Bei der Faktorisierung von $\lambda\delta - k$ wird weiterhin die Umlaufzahl von λ bezüglich der Kurve $\hat{k}$ eine Rolle spielen:

3.4 Definiton und Lemma.
Es sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ eine stetig differenzierbare geschlossene Kurve in $\mathbb{C}$ mit der Spur Γ. Dann heißt für $z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma$ die Zahl

$$\omega(z; \gamma) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z} = \frac{1}{2\pi i} \int_a^b \frac{\gamma'(t)}{\gamma(t) - z} dt$$

die *Umlaufzahl* (oder der *Index*) von z bzgl. γ. Es gilt:

a) $\omega(z; \gamma) \in \mathbb{Z}$,

b) $\omega(z; \gamma) = \omega(0; z\mathbf{1} - \gamma) = \omega(0; \gamma - z\mathbf{1})$,

c) $\omega(0; \gamma_1\gamma_2) = \omega(0; \gamma_1) + \omega(0; \gamma_2)$ und damit insbesondere $\omega(0; -\gamma) = \omega(0; \gamma)$,

d) $\omega(z; \gamma) = \omega(1; z^{-1}\gamma)$.

Beweis: Funktionentheorie I. $\square$.

Leider ist diese Definition der Umlaufzahl für unsere Bedürfnisse nicht allgemein genug, da wir i.A. nicht erwarten können, dass $\hat{k}$ differenzierbar ist. Wir können uns aber mit einem Approximationsargument behelfen, denn nach 1.3 gibt es zu $k \in L^1(\mathbb{R})$ eine Folge (k_n) in $\mathcal{S}$ mit $\|k_n - k\|_{L^1} \to 0 (n \to \infty)$ und $\hat{k}_n \to k$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$. Dann ist $\omega(1; \hat{k}) = \lim_{n\to\infty} \omega(1; \hat{k}_n)$.

Im folgenden Beispiel betrachten wir nun ein Hilfsfunktionenpaar, das letzte Hilfsmittel, das wir zur Formulierung unseres Faktorisierungssatzes noch benötigen:

3.5 Beispiel.
Die Funktionen $\psi_\pm \in L^1(\mathbb{R}^\pm)$ seien gegeben durch

$$\psi_+(t) = \begin{cases} 2e^{-t} & \text{für } t \geq 0, \\ 0 & \text{für } t < 0, \end{cases} \qquad \psi_-(t) = \begin{cases} 2e^{t} & \text{für } t \leq 0, \\ 0 & \text{für } t > 0. \end{cases}$$

Ihre Fouriertransformierten ergeben sich zu

$$\hat{\psi}_+(t) = 2\int_0^\infty e^{ist-s} ds = \frac{2}{1-it}, \quad \hat{\psi}_-(t) = 2\int_{-\infty}^0 e^{s+ist} ds = \frac{2}{1+it}.$$

Weiter erhalten wir

$$1 - \hat{\psi}_+(t) = \frac{it+1}{it-1} \quad \text{und} \quad 1 - \hat{\psi}_-(t) = \frac{it-1}{it+1}. \tag{3.9}$$

Daraus ergibt sich

$$\mathbf{1} = (\mathbf{1} - \hat{\psi}_+)(\mathbf{1} - \hat{\psi}_-),$$

das heißt

$$\mathcal{F}\delta = \mathcal{F}(\delta - \psi_+)\mathcal{F}(\delta - \psi_-) = \mathcal{F}[(\delta - \psi_+) * (\delta - \psi_-)].$$

Mit 1.6 folgt hieraus

$$\delta = (\delta - \psi_+) * (\delta - \psi_-). \tag{3.10}$$

Damit haben wir also die weiter oben gemachte Bemerkung gezeigt, wonach die Räume $L^1_\delta(\mathbb{R}^\pm)$ bezüglich der Inversenbildung nicht abgeschlossen sind. Wir wollen nun noch die Umlaufzahl $\omega(1; \hat{\psi}_+)$ bestimmen. Dies kann einerseits mit Hilfe der Formeln aus 3.5 geschehen – wir wollen es hier jedoch mit einer geometrischen Begründung tun: nach 3.4 b) ist $\omega(1; \hat{\psi}_+) = \omega(0; \mathbf{1} - \hat{\psi}_+)$. Die durch $\mathbf{1} - \hat{\psi}_+$ parametrisierte Kurve ist nach (3.9) gerade das Bild der reellen Achse unter der Möbiustransformation $S : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ mit

$$S(z) = \frac{iz+1}{iz-1}$$

(dabei bezeichne $\widehat{\mathbb{C}} := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{C}$). Mit $S(-1) = i, S(0) = -1, S(1) = -i$ und den Abbildungseigenschaften der Möbiustransformation (Kreistreue, Orientierungstreue) sehen wir, dass S die von $-\infty$ nach ∞ durchlaufene reelle Achse auf den positiven umlaufenen Einheitskreis abbildet. Somit ist $\omega(1; \psi_+) = 1$. Analog zeigt man $\omega(1; \psi_-) = -1$.

Jetzt haben wir alle Hilfsmittel beisammen um den folgenden Satz 3.6 formulieren zu können, der uns die Zerlegung von $\lambda\delta - k$ liefert. Seinen Beweis müssen wir jedoch noch etwas aufschieben:

3.6 Satz.
Es seien $k \in L^1(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(k)$ und $n := \omega(\lambda; \hat{k})$. Dann existiert ein $g \in L^1(\mathbb{R})$ mit

$$\lambda\delta - k = \lambda \exp g * \begin{cases} \delta & \text{für } n = 0, \\ (\delta - \psi_+)^n & \text{für } n > 0, \\ (\delta - \psi_-)^{-n} & \text{für } n < 0. \end{cases}$$

Im Fourierraum lautet die Darstellung:

$$\lambda - \hat{k}(t) = \lambda \exp(g(t)) \left(\frac{it+1}{it-1}\right)^n \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Eine Faktorisierung gemäß (3.6) erhalten wir nun aus dem folgenden Korollar:

3.7 Korollar.
In der Situation von 3.6 existieren reguläre $q_\pm \in L^1_\delta(\mathbb{R}^\pm)$ derart, dass $q_\pm - 1 \in L^1_\delta(\mathbb{R}^\pm)$ und

$$\lambda\delta - k = \lambda q_+ * q_- * \begin{cases} \delta & \text{für } n = 0, \\ (\delta - \psi_+)^n & \text{für } n > 0, \\ (\delta - \psi_-)^{-n} & \text{für } n < 0. \end{cases}.$$

Im Fourierraum gilt:

$$\lambda - \hat{k}(t) = \lambda \hat{q}_+(t) \hat{q}_-(t) \left(\frac{it+1}{it-1}\right)^n \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Dabei sind q_+ und q_- eindeutig bestimmt, wenn wir zusätzlich $q_\pm - \delta \in L^1_\delta(\mathbb{R}^\pm)$ fordern.

Beweis: Wir bestimmen g aus 3.6 und setzen $g_\pm := P^\pm g$. Dann ist $g = g_+ + g_-$ und $e^g = e^{g_+} * e^{g_-}$. Mit $q_\pm := e^{g_\pm}$ erhalten wir das Gewünschte.
Um die Eindeutigkeitsaussage zu beweisen, nehmen wir an, dass wir eine weitere solche Faktorisierung mit Funktionen $p_\pm \in L^1_\delta(\mathbb{R}^\pm)$ gefunden hätten mit $p_+ * p_- = q_+ * q_-$ und $p_\pm - \delta, q_\pm - \delta \in L^1_\delta(\mathbb{R}^\pm)$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} & p_+ * p_- * p_+^{-1} * q_-^{-1} = q_+ * q_- * p_+^{-1} * q_-^{-1} \\ \Longrightarrow \ & p_- * q_-^{-1} - \delta = q_+ * p_+^{-1} - \delta \in L^1_\delta(\mathbb{R}^-) \cap L^1_\delta(\mathbb{R}^+) \end{aligned}$$

Also folgt $p_- = q_-$ und $p_+ = q_+$. $\square$

Mit dem folgenden Lemma 3.8 und dem Satz 3.9 werden wir nun den Beweis des Satzes 3.6 vorbereiten.

3.8 Lemma.
Es sei $\mathcal{A}$ eine kommutative Banachalgebra mit Eins und $f : [0,1] \longrightarrow \mathcal{A}$ eine stetige Abbildung. Die Folge (S_n) in $\mathcal{A}$ sei definiert duch

$$S_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} f\left(\frac{j}{n}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Dann ist (S_n) konvergent und wir setzen

$$\lim_{n\to\infty} S_n =: \int_0^1 f(s)ds \in \mathcal{A}.$$

Ferner gilt dann die Dreiecksungleichung

$$\left\|\int_0^1 f(s)ds\right\| \leq \int_0^1 \|f(s)\|ds,$$

und schließlich gilt im Fall $\mathcal{A} = L^1_\delta(\mathbb{R})$ gilt für die Fouriertransformation

$$\mathcal{F}\left(\int_0^1 f(s)ds\right)(t) = \int_0^1 \mathcal{F}[f(s)](t)ds \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

Beweis: Wir zeigen, dass (S_n) eine Cauchy-Folge in $\mathcal{A}$ ist. Dazu seien $n, m \in \mathbb{N}$. Dann können wir S_{nm} aufspalten gemäß

$$S_{nm} = \frac{1}{nm}\sum_{j=1}^{nm} f\left(\frac{j}{nm}\right) = \frac{1}{nm}\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{(\ell-1)n+p}{nm}\right),$$

indem wir den Summationsindex j aufspalten in $j = (\ell-1)n+p$ für $1 \leq \ell \leq m$ und $1 \leq p \leq n$. Damit folgt nun:

$$\begin{aligned} S_{nm} - S_m &= S_{nm} - \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{m}\sum_{\ell=1}^{m} f\left(\frac{\ell}{m}\right)\cdot n = S_{nm} - \frac{1}{nm}\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{p=1}^{n} f\left(\frac{\ell}{m}\right) \\ &= \frac{1}{nm}\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{p=1}^{n}\left[f\left(\frac{(\ell-1)n+p}{nm}\right) - f\left(\frac{\ell}{m}\right)\right]. \end{aligned}$$

Weiterhin ist

$$\left|\frac{(\ell-1)n+p}{nm} - \frac{\ell}{m}\right| = \frac{|p-m|}{nm} = \frac{1}{m}\underbrace{\left|\frac{p}{n} - 1\right|}_{<1} < \frac{1}{m}.$$

Nun sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da f auf dem Kompaktum $[0,1]$ gleichmäßig stetig ist, gibt es ein $\delta > 0$, so dass für alle $s, t \in [0,1]$ mit $|s-t| < \delta$ gilt: $\|f(s) - f(t)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Wir wählen $n, m \geq \frac{1}{\delta}$ und erhalten:

$$\|S_{nm} - S_m\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{und analog} \qquad \|S_{nm} - S_n\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Also ist $\|S_n - S_m\| \leq \|S_n - S_{nm}\| + \|S_{nm} - S_m\| < \varepsilon$ für alle $n.m \geq \frac{1}{\delta}$, d.h. (S_n) ist eine Cauchy-Folge und $-$ weil $\mathcal{A}$ eine Banachalgebra ist $-$ damit konvergent mit Grenzwert in $\mathcal{A}$.
Die Dreiecksungleichung ist klar, die Vertauschung mit der Fouriertransformation folgt aus $\mathcal{F}S_n = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathcal{F}[f(\frac{j}{n})]$ und dem Grenzübergang $n \to \infty$. $\square$

3.9 Satz.
Sei $k \in L^1(\mathbb{R})$ und $1 \notin \sigma(k)$, d.h. $\hat{k}(t) \neq 1$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\exists g \in L^1(\mathbb{R}): \; e^g = \delta - k \quad \Longleftrightarrow \quad \omega(1;\hat{k}) = 0.$$

Beweis: (i) Sei zunächst $k \in \mathcal{S}$. Wir setzen

$$\varphi(t) := \int_{-\infty}^t \frac{\hat{k}'(s)}{\hat{k}(s)-1} ds = \int_1^{1-\hat{k}(t)} \frac{dw}{w},$$

wobei wir auf der rechten Seite längs der durch $w(s) = 1-\hat{k}(s)$, $s \in (-\infty, t]$ parametrisierten Kurve integrieren. Es ist $\lim_{t\to-\infty}\varphi(t) = 0$ und $\lim_{t\to\infty}\varphi(t) = 2\pi i\omega(1;\hat{k})$. Aus der Vorlesung Funktionentheorie I ist folgende Formel für den Logarithmus bekannt:

$$\exp\left(\int_1^z \frac{dw}{w}\right) = z \qquad (z \in \mathbb{C}),$$

wobei wir entlang einer beliebigen von 1 nach z führenden Kurve integrieren, die nicht durch 0 verläuft. Damit erhalten wir:

$$\exp\varphi(t) = 1 - \hat{k}(t) \qquad (t \in \mathbb{R}). \tag{3.11}$$

(ii) Es gelte nun $\omega(1;\hat{k}) = 0$. Dann ist nach (i) $\lim_{t\to\pm\infty}\varphi(t) = 0$ und somit $\varphi \in \mathcal{S}$. Mit $g := \mathcal{F}^{-1}\varphi$ ist

$$\exp\hat{g}(t) = \exp\varphi(t) \overset{(3.11)}{=} 1 - \hat{k}(t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

und somit nach 3.3 a) $\exp g = \delta - k$.
(iii) Nun sei umgekehrt $\exp g = \delta - k$ für ein $g \in \mathcal{S}$. Wiederum verwenden wir 3.3 a) und (3.11) und erhalten $\exp\hat{g}(t) = 1 - \hat{k}(t) = \exp\varphi(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$. Die Exponentialfunktion ist periodisch mit der Periode $2\pi i$, was uns die Darstellung

$$\varphi(t) = \hat{g}(t) + 2\pi i n(t) \qquad \text{mit } n(t) \in \mathbb{Z} \text{ für alle } t \in \mathbb{R}$$

liefert. Weil φ und g stetig sind, muss $n \equiv const$ sein. Wegen $\lim_{t\to-\infty}\varphi(t) = 0 = \lim_{t\to-\infty}\hat{g}(t)$ nach dem Lemma von Riemann-Lebesgue, ist $n \equiv 0$ und somit

$$2\pi i\omega(1;\hat{k}) = \lim_{t\to\infty}\varphi(t) = \lim_{t\to\infty}\hat{g}(t) \overset{\text{Riemann-Lebesgue}}{=} 0.$$

(iv) Jetzt betrachten wir $k \in L^1(\mathbb{R})$ und geben uns $g \in L^1(\mathbb{R})$ vor mit $\exp g = \delta - k$. Nach 1.3 existiert eine Folge (g_n) in $\mathcal{S}$ mit $\|g_n - g\|_{L^1} \to 0$ $(n \to \infty)$. Ferner konvergiert $\hat{g}_n \to \hat{g}$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$. Wir setzen $k_n := \delta - \exp g_n$ $(n \in \mathbb{N})$. Dann gilt $k_n \to k$ in $L^1_\delta(\mathbb{R})$

und $\hat{k}_n \to \hat{k}$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$. Nach (iii) ist $\omega(1;\hat{k}_n) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und somit auch $\omega(1;\hat{k}) = \lim_{n\to\infty} \omega(1;\hat{k}_n) = 0$.

(v) Schließlich sei nun $\omega(1;\hat{k}) = 0$ für $k \in L^1(\mathbb{R})$. Wir wählen eine Folge (k_n) in $\mathcal{S}$ mit $\|k_n - k\|_{L^1} \to 0$ und $\hat{k}_n \to k$ gleichmäßig auf $\mathbb{R}$. Nach Voraussetzung gibt es ein $n_1 \in \mathbb{N}$, so dass $1 \notin \sigma(k_n)$ und $\omega(1;\hat{k}_n) = 0$ für alle $n \geq n_1$. Durch

$$\hat{g}_n(t) = \int_1^{1-\hat{k}_n(t)} \frac{dw}{w} \qquad (n \geq n_1, t \in \mathbb{R})$$

erhalten wir eine Folge $(g_n)_{n\geq n_1}$ in $\mathcal{S}$ und nach (ii) gilt $\exp g_n = \delta - k_n$ für alle $n \geq n_1$. Wir zeigen, dass (g_n) eine Cauchy-Folge in $L^1(\mathbb{R})$ ist. Dazu seien $n, m \geq n_1$, dann ist

$$\hat{g}_n(t) - \hat{g}_m(t) = \int_{1-\hat{k}_m(t)}^{1-\hat{k}_n(t)} \frac{dw}{w},$$

wobei wir nun längs einer beliebigen Verbindungskurve von $1-\hat{k}_m(t)$ nach $1-\hat{k}_n(t)$ integrieren, die in der (geeignet) geschlitzten Ebene verläuft. Wir betrachten die Verbindungsgerade γ_{nm} der Punkte $1-\hat{k}_m(t)$ und $1-\hat{k}_n(t)$, die durch die Parametrisierung

$$w(u) = (1-\hat{k}_m(t)) - u(\hat{k}_n(t) - \hat{k}_m(t)) \ , \ u \in [0,1]$$

gegeben ist. Sind n, m groß genug, etwa $n, m \geq n_2$ mit $n_2 \geq n_1$, so verläuft γ_{nm} nicht durch 0 und es gilt:

$$\hat{g}_n(t) - \hat{g}_m(t) = \int_{\gamma_{nm}} \frac{dw}{w} = \int_0^1 \frac{\hat{k}_m(t) - \hat{k}_n(t)}{(1-\hat{k}_m(t)) - u(\hat{k}_n(t) - \hat{k}_m(t))} du \tag{3.12}$$

$$= (\hat{k}_m(t) - \hat{k}_n(t)) \int_0^1 \{(1-\hat{k}_m(t)) - u(\hat{k}_n(t) - \hat{k}_m(t))\}^{-1} du. \tag{3.13}$$

Wir definieren für $n, m \geq n_2$ die Funktionen $f_{nm} : [0,1] \longrightarrow L^1_\delta(\mathbb{R})$ durch

$$f_{nm}(u) = \{(\delta - k_m) - u(k_n - k_m)\}^{-1}$$

und setzen

$$H_{nm} := \int_0^1 f_{nm}(u) du = \int_0^1 \{(\delta - k_m) - u(k_n - k_m)\}^{-1} du \in L^1_\delta(\mathbb{R}). \tag{3.14}$$

Dann ist nach 3.8 und (3.13)

$$\mathcal{F}(g_n - g_m) = \mathcal{F}(k_m - k_n)\mathcal{F}H_{nm}. \tag{3.15}$$

Für $n, m \geq n_2$ sind die Funktionen f_{nm} stetig und somit über dem Kompaktum $[0,1]$ gleichmäßig beschränkt bzgl. n und m, d.h. es existiert $C > 0$ derart, dass für alle $n, m \geq n_2$ und alle $u \in [0,1]$ gilt: $\|f_{nm}(u)\|_{L^1_\delta} \leq C$. Damit ist nach (3.14) auch $\|H_{nm}\|_{L^1_\delta} \leq C$ $(n, m \geq n_2)$ und wir erhalten somit für alle $n, m \geq n_2$:

$$\|g_n - g_m\|_{L^1} \stackrel{(3.15)}{=} \|(k_n - k_m) * H_{nm}\|_{L^1} \leq \|k_n - k_m\|_{L^1} \|H_{nm}\|_{L^1_\delta} \leq C\|k_n - k_m\|_{L^1} \stackrel{n,m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Also ist (g_n) eine Cauchy-Folge in $L^1(\mathbb{R})$ und damit konvergent gegen ein $g \in L^1(\mathbb{R})$. Weiterhin konvergiert $\exp g_n \to \exp g$. Andererseits hatten wir die Folge (g_n) so konstruiert, dass $\exp g_n = \delta - k_n \to \delta - k$ $(n \to \infty)$. Die Eindeutigkeit des Grenzwerts liefert uns somit $\exp g = \delta - k$. $\square$

Jetzt können wir endlich den Satz 3.6 beweisen:

Beweis von 3.6: Es sei $X = x - \delta \in L^1_\delta(\mathbb{R})$ definiert durch

$$X := (\delta - \lambda^{-1}k) * \begin{cases} \delta & \text{für } n = 0, \\ (\delta - \psi_+)^{-n} & \text{für } n > 0, \\ (\delta - \psi_-)^n & \text{für } n < 0. \end{cases}$$

Nach Voraussetzung ist $1 \notin \sigma(\lambda^{-1}k) = \hat{k}(\mathbb{R}) \cup \{0\}$ und nach (3.9) ist $1 - \hat{\psi}_\pm(t) \neq 0 (t \in \mathbb{R})$. Also ist X regulär nach 2.5 (Satz von Wiener). Ferner gilt nach 3.4:

$$\omega(1;\hat{x}) = \omega(0;\mathbf{1} - \hat{x}) = \omega(0;\mathcal{F}X) = \omega(0;1 - \lambda^{-1}k) + \begin{cases} \omega(0;\mathbf{1}) & \text{für } n = 0, \\ -n\omega(0;\mathbf{1} - \hat{\psi}_+) & \text{für } n > 0, \\ n\omega(0;\mathbf{1} - \hat{\psi}_-) & \text{für } n < 0. \end{cases}$$

3.5 liefert nun $\omega(1;\hat{x}) = 0$ und mit 3.9 erhalten wir somit: $\exists g \in L^1(\mathbb{R}) :\ e^g = \delta - x = X$. $\square$