Die Stochastische Integralgleichung $X(t) = a + \int_0^t \mu(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s)$

Simon Keller

04.12.2006

1 Mathematische Grundlagen und Herleitung

1.1 Normalverteilung

Eine normalverteilte Zufallsvariable X mit Paramtern μ und σ hat die Dichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2).$$

Im folgenden werde ich die Notation $X \sim N(\mu, \sigma)$ verwenden. μ ist der Erwartungswert und σ die Standartabweichung von X.

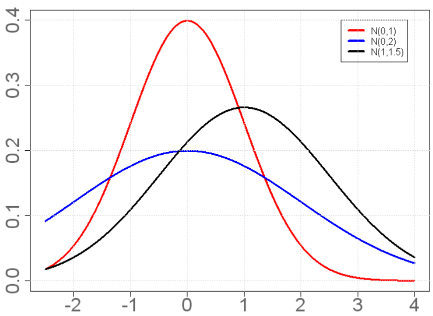

Abbildung 1: Dichtefunktion von normalverteilten Zufallsvariablen mit unterschiedlichen Parametern

1.2 Stochastische Prozesse

1.2.1 Formale Definition

Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(Z, \mathcal{Z})$ ein mit einer σ-Algebra versehener Raum und T eine Indexmenge. Ein stochastischer Prozess X ist dann eine Familie von Zufallsvariablen $X_t : \Omega \to Z, t \in T$, so dass $\forall t \in T$ die eingeschränkte Abbildung $X_t : \omega \to X_t(\omega)$ $\mathcal{F} - \mathcal{Z}$ - messbar ist.

1.2.2 Beispiel

Ein einfaches Beispiel für einen zeitdiskreten Punktprozess ist der symmetrische **Random Walk**, hier veranschaulicht durch ein Glücksspiel: ein Spieler beginnt zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einem Startkapital von 10 Euro ein Spiel, bei dem er nacheinander immer wieder eine Münze wirft. Bei 'Kopf' gewinnt er einen Euro, bei 'Zahl' verliert er einen. Der Kontostand $X_t, t \in N_0$ nach t Spielen ist nun ein stochastischer Prozess (mit deterministischer Startverteilung $X_0 = 10$).

1.3 Der Wiener Prozess

Ein stochastischer Prozess W heißt Wiener Prozess, wenn die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. W(0)=0
2. Der Prozess hat unabhängige Zuwächse, d.h. wenn $r < s \leq t < u$, dann sind W(u) - W(t) und W(s) - W(r) unabhängige stochastische Variablen
3. Für $s < t$ hat die stochastische Variable W(t) - W(s) die Normalverteilung $N(0, \sqrt{t-s})$
4. W hat stetige Pfade, d.h. $\forall \omega \in \Omega$ ist die Abbildung $t \rightarrow W(t)$ stetig

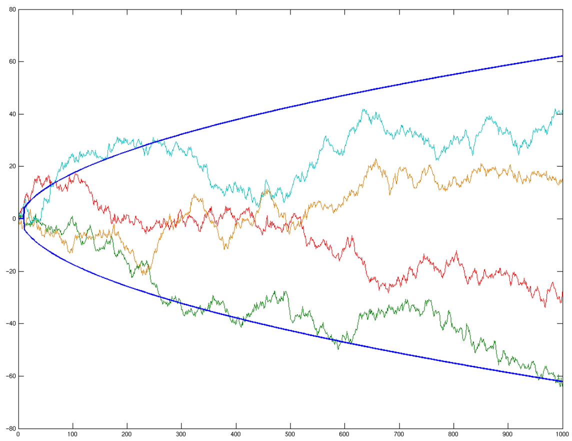

Abbildung 2: Vier unabhängige Wiener Prozesse mit $0 < t < 1000$ und die asymptotischen Hüllkurven

1.4 Herleitung der stochastischen Integralgleichung

Um die Integralgleichung herzuleiten betrachten wir zunächst einen Stochastischen Prozess, dessen lokale Dynamik durch die folgende stochastische Differenzengleichung angenähert werden kann:

$$X(t+\Delta t) - X(t) = \mu(t, X(t))\Delta t + \sigma(t, X(t))Z(t) \tag{1}$$

Z(t) ist ein normalverteilter Störterm mit $Z(t) \sim N(0, \sqrt{\Delta t})$, der unabhängig von den Ereignissen bis zum Zeitpunkt t ist. μ und σ sind deterministische Funktionen. Der Prozess X wird also im Zeitintervall $[t, t+\Delta t]$ getrieben von zwei Komponenten:

- Einer lokal deterministischen Geschwindigkeit $\mu(t, X(t))$
- Einem Gauss'schen Störterm, verstärkt durch den Faktor $\sigma(t, X(t))$

Mit Hilfe eines Wiener Prozesses können wir nun die Gleichung (1) umschreiben in die folgende Form:

$$X(t+\Delta t) - X(t) = \mu(t, X(t))\Delta t + \sigma(t, X(t))\Delta W(t) \tag{2}$$

Hierbei ist $\Delta W(t)$ definiert durch

$$\Delta W(t) = W(t+\Delta t) - W(t).$$

Nun betrachten wir die Gleichung (2) für $\Delta t \to 0$. Formal erhalten wir den Ausdruck

$$\begin{cases} dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) \\ X(0) = a, \end{cases} \tag{3}$$

wobei man (3) als Kurzform der folgenden Integralgleichung auffasen kann:

$$X(t) = a + \int_0^t \mu(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s) \tag{4}$$

Dies scheint Sinn zu machen, denn wir konnten ja fur jedes feste $\omega \in \Omega$ $\int_0^t \mu(s, X_s(\omega))ds$ als gewöhnliches Riemann Integral und $\int_0^t \sigma(s, X(s))dW_s(\omega)$ als Riemann-Stieltjes Integral interpretieren.
Dieser Weg ist jedoch problematisch. Riemann-Stieltjes-Integrale sind im Allgemeinen nur dann definiert, wenn der Integrator lokal von beschränkter Variation ist. Man kann aber zeigen, dass Wiener Prozesse fast sicher lokal von unbeschränkter Variation sind. Es stellt sich heraus, dass es i.A. unmöglich ist, den Ausdruck

$$\int_0^t g(s)dW(s) \tag{5}$$

pfadweise zu definieren.
Wenn wir uns aber davon lösen, ein solches stochastisches Integral pfadweise definieren zu wollen, dann ist es ohne Weiteres möglich, dem Ausdruck (4) eine sinnvolle Bedeutung zuzumessen. Er lasst sich nämlich fur eine große Klasse von Integranden als L^2 -Limes einer Folge pfadweise definierter Integrale sehr einfacher Integranden definieren. Dieses Kalkül werde ich im nächsten Paragraphen vorstellen.

2 Stochastische Integrale

2.1 Information

Sei X ein gegebener stochastischer Prozess. Im folgenden werde ich den Term 'von X erzeugte Information' anhand einer heurististischen Definition einführen. Die ausführliche formale Definition kann man der unten angegebenen Literatur entnehmen.

2.1.1 Heuristische Defintion

Das Symbol $\mathcal{F}_t^X$ bezeichnet 'die von X auf dem Zeitintervall $[0, t]$ erzeugte Information'.
Falls es möglich ist, anhand der Beobachtung von $\{X(s); 0 \leq s \leq t\}$ zu entscheiden, ob ein Ereignis A eingetreten ist oder nicht, dann schreiben wir $A \in \mathcal{F}_t^X$. Man nennt A dann $\mathcal{F}_t^X$-messbar.
Falls der Wert einer stochastischen Variable Z anhand der Beobachtung von $\{X(s); 0 \leq s \leq t\}$ bestimmt werden kann, so schreiben wir $Z \in \mathcal{F}_t^X$.
Ist Y ein stochastischer Prozess und gilt $Y(t) \in \mathcal{F}_t^X \forall t \geq 0$, so nennt man Y adaptiert bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_t^X\}_{t \geq 0}$.

2.1.2 Beispiele

1. Sei A = $\{X(s) \leq 3.14 \forall s \leq 9\}$. Dann gilt $A \in \mathcal{F}_9^X$.
2. Sei A = $\{X(10) \geq 8\}$. Dann gilt $A \in \mathcal{F}_{10}^X$. Jedoch gilt nicht $A \in \mathcal{F}_9^X$, da es unmöglich ist, zu entscheiden, ob A eingetroffen ist, wenn man den Verlauf des Prozesses nur auf dem Intervall $[0, 9]$ beobachtet hat.
3. Sei $Z = \int_0^5 X(s)ds$. Dann gilt $Z \in \mathcal{F}_5^X$.
4. Sei W ein Wiener Prozess. Ist der Prozess Y definiert durch $Y(t) = sup_{s \leq t} W(s)$, dann gilt Y is adaptiert bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}$. Ist der Prozess Y higegen definiert durch $Y(t) = sup_{s \leq t+1} W(s)$, so ist Y nicht adaptiert bezüglich Filtration $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t \geq 0}$.

2.2 Das stochastische Integral

Nun wollen wir wie oben angedeutet das stochastische Integral definieren. Wir betrachten einen Wiener Prozess sowie einen anderen stochastischen Prozess g als gegeben. Um die Existenz des stochastischen Integrals garantieren zu können, müssen wir eine Integrabililitätsvoraussetzung über g treffen.

2.2.1 Definition $\mathcal{L}^2$

1. Ein Prozess g gehört zu $\mathcal{L}^2[a,b]$, falls die folgenden Bedingungen erfüllt sind:
   - $\int_a^b E[g^2(s)]ds < \infty$
   - Der Prozess g ist adaptiert bezüglich der Filtration $\{\mathcal{F}_t^W\}_{t\geq 0}$
2. Es gilt $g \in \mathcal{L}^2$, wenn $g \in \mathcal{L}^2[0,t]\ \forall t > 0$

2.2.2 Definition des stochastischen Integrals

Ziel ist es, das stochastische Integral $\int_0^t g(s)dW(s)$ für einen Prozess $g \in \mathcal{L}^2[a,b]$ zu definieren. Dazu benötigen wir zwei Schritte. Zunächst nehmen wir an, dass der Prozess $g \in \mathcal{L}^2[a,b]$ einfach ist, i.e. es existieren deterministische Zeitpunkte $a = t_0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n = b$, so dass g konstant ist auf jedem Teilintervall. Das heisst es gilt $g(s) = g(t_k)$ auf jedem Teilintervall $s \in [t_k, t_{k+1})$. Wir definieren das stochastische Integral dann durch die Formel

$$\int_0^t g(s)dW(s) = \sum_{k=0}^{n-1} g(t_k)[W(t_{k+1}) - W(t_k)]. \tag{6}$$

Um nun das stochastische Integral für einen allgemeinen Prozess $g \in \mathcal{L}^2[a,b]$ definieren, gehen wir wie folgt vor:

1. Wir approximieren g mit einer Folge von einfachen Prozessen g_n mit $\int_a^b E[(g_n(s) - g(s))^2]ds \to 0$ für $n \to \infty$
2. Für jedes n ist das Integral $\int_a^b g_n(s)dW(s)$ eine wohldefinierte stochastische Zufallsvariable Z_n und es ist möglich zu beweisen, dass es eine stochastische Zufallsvariable Z gibt mit $Z_n \to Z$ (in $\mathcal{L}^2$) für $n \to \infty$
3. Im letzten Schritt definieren wir das stochastische Integral als

$$\int_0^t g(s)dW(s) = lim_{n\to\infty} \int_0^t g_n(s)dW(s) \tag{7}$$

2.2.3 Eigenschaften des stochastischen Integrals

Satz 1 *Sei $g \in \mathcal{L}^2[a,b]$ Dann gilt:*

$$E\left[\int_a^b g(s)dW(s)\right] = 0 \tag{8}$$

$$E\left[\left(\int_a^b g(s)dW(s)\right)^2\right] = \int_a^b [g^2(s)]d(s) \tag{9}$$

Darüber hinaus ist $\int_a^b g(s)dW(s)$ $\mathcal{F}_b^X$ - messbar.

Der Beweis dieser Eigenschaften ist anspruchsvoll, im Wesentlichen ist die Strategie, die Eigenschaften zunächst für einfache g zu beweisen und dann zu zeigen, dass die Eigenschaften auch beim Grenzübergang im Sinne von (7) erhalten bleiben.

2.3 Die Itô-Formel

Wie oben erwähnt, wird die stochastische Integralgleichung

$$X(t) = a + \int_0^t \mu(s, X(s))ds + \int_0^t \sigma(s, X(s))dW(s)$$

in der Literatur oftmals durch das stochastische Differential mit Anfangsbedingung

$$\begin{cases} dX(t) = \mu(t, X(t))dt + \sigma(t, X(t))dW(t) \\ X(0) = a \end{cases}$$

dargestellt. Diese abkürzende Darstellung werde ich im Folgenden nutzten, um die Formel von Itô, eines der fundamentalen Ergebnisse der stochastischen Analysis vorzustellen.

Satz 2 *Das stochastische Differential des Prozesses X sei gegeben duch*

$$dX(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t),$$

wobei μ und σ adaptierte Prozesse seien. Der Prozess Z sei definiert durch $Z(t) = f(t, X(t))$, wobei $f \in C^{1,2}$ gelte. Dann ist das stochastische Differential von Z gegeben durch

$$df(t, X(t)) = \left[\frac{\partial f}{\partial t} + \mu\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}\right]dt + \sigma\frac{\partial f}{\partial x}dW(t). \tag{10}$$

Hierbei habe ich zur einfacheren Darstellung auf die Argumente verzichtet, also z.B. den Term $\mu(t)\frac{\partial f}{\partial x}(t, X(t))$ durch $\mu\frac{\partial f}{\partial x}$ ersetzt.

3 Beispiele

Allgemein lässt sich sagen, dass man unter relativ starken Voraussetzungen an μ und σ die Existenz und die Eindeutigkeit einer Lösung der stochastischen Integralgleichung (4) beweisen kann. Mit Hilfe der oben aufgebauten Theorie werden werde ich im Folgenden ein Beispiel aufzeigen, für welches (4) explizit lösbar ist. Es handelt sich hierbei um die Geometrische Brown'sche Bewegung, die insbesondere in der Finanzmathematik bei der Simulation von Aktienkursen oder auch bei der Bewertung von Derivaten eine entscheidende Rolle spielt.

3.1 Die geometrische Brown'sche Bewegung

Wir betrachten den Fall $\mu(t, X(t)) = \alpha X(t)$ und $\sigma(t, X(t)) = \sigma X(t)$, also die stochastische Integralgleichung

$$X(t) = x_0 + \int_0^t \alpha X(s)ds + \int_0^t \sigma X(s)dW(s), \tag{11}$$

bzw. das äquivalente stochastische Diffential

$$\begin{cases} dX(t) = \alpha X(t)dt + \sigma X(t)dW(t) \\ X(0) = x_0. \end{cases} \tag{12}$$

Satz 1 *Die Lösung der Gleichung (12) ist gegeben durch*

$$X(t) = x_0 \exp[(\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t)] \tag{13}$$

Der Erwartungswert von X zum Zeitpunkt t ist gegeben durch

$$E[X_t] = x_0 \exp^{\alpha t} \tag{14}$$

Der Beweis des ersten Teils des Satzes kann geführt werden, indem man die Itô Formel auf X(t) anwendet und dann durch einsetzen zeigt, dass (12) erfüllt ist.
Die Frage, wie man auf diese Lösung kommt, ist meiner Ansicht nach die interessantere. Die Lösung des analogen determistischen Problems ist eine Exponential-Funktion. Diesen Ansatz werden wir auch hier verfolgen, wir untersuchen also zunächst den Prozess $Z_t = lnX_t$. Hierfür nehmen wir zunächst an, dass eine Lösung X_t existiert und dass diese positiv ist. Itô:

$$dZ_t = [0 + \alpha X_t \frac{1}{X_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t^2 \frac{-1}{X_t^2}]dt + \sigma dW(t), i.e.$$

$$dZ_t = (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dW(t).$$

Als Nebenbedingung erhalten wir $Z_0 = ln(x_0)$. Da die rechte Seite Z nicht enthält können wir direkt integrieren und erhalten

$$Z_t = ln(x_0) + (\alpha - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W(t).$$

Daraus folgt die Gleichung für X_t. Um die zweite Behauptung zu zeigen, müssen wir $E(\exp[\sigma W(t)])$ berechnen. Hierzu gehen wir wie folgt vor:
Definiere $Z := \exp[\sigma W(t)]$ Aus Itô folgt direkt:

$$dZ(t) = \frac{1}{2}\sigma^2 \exp[\sigma W(t)]dt + \sigma \exp[\sigma W(t)]dW(t), i.e.$$

$$dZ(t) = \frac{1}{2}\sigma^2 Z(t)dt + \sigma Z(t)dW(t)$$

In Integralform:

$$Z(t) = 1 + \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^t Z(s)ds + \sigma \int_0^t Z(s)dW(s)$$

Nun betrachten wir den Erwartungswert auf beiden Seiten und definieren $m(t) := E(Z_t)$. Dies führt zur Gleichung

$$m(t) = 1 + \frac{1}{2}\sigma^2 \int_0^t m(s)ds$$

Nun leiten wir beide Seiten nach t ab und erhalten:

$$\begin{cases} m'(t) = \frac{1}{2}\sigma^2 m(t) \\ m(0) = 1. \end{cases}$$

Lösen wir diese Standartgleichung, so erhalten wir

$$m(t) = E[\exp[\sigma W(t)]] = exp[\sigma^2 t/2]$$

Referenzen:

- Steven E. Shreve - Stochastic Calculus for Finance II
- Tomas Bjork - Arbitrage Theory in Continuous Time