Seminar: Integralgleichungen (WS 06/07)
DAS ABELSCHE PROBLEM
Andrea Rosenbeiger-Ezzahoui

Wir betrachten Volterrasche Integralgleichungen 1.Art der Form

(1) $\int_a^s V(s,t)x(t)dt = f(s)$ deren Kern von der Gestalt

(2) $V(s,t) = \dfrac{F(s,t)}{(s-t)^\alpha}$ $(0<\alpha<1, a \le t < s)$ sind. Die zu lösende Integralgleichung ist

(3) $\int_a^s \dfrac{F(s,t)}{(s-t)^\alpha} x(t)dt = f(s)$ $(a \le s)$, wobei $f(s)$ eine für $s \ge a$ stetige, bekannte Funktion ist. $F(s,t)$ ist in jedem Quadrat $[a,b]\times[a,b]$ eine stetige Funktion. Die Lösung von (3) soll im Bereich der stetigen Funktionen bestimmt werden. Integralgleichungen des Typs (3) werden *Abelsche Integralgleichungen* genannt.

Wir multiplizieren beide Seiten von (3) mit $\dfrac{1}{(u-s)^{1-\alpha}}$, integrieren nach s von a bis u

$$\int_a^u \frac{f(s)}{(u-s)^{1-\alpha}}ds = \int_a^u \frac{ds}{(u-s)^{1-\alpha}}\left[\int_a^s \frac{F(s,t)}{(s-t)^\alpha}x(t)dt\right]$$

und vertauschen die Reihenfolge der Integrationen mit Hilfe der Dirichletschen Formel.
So gelangen wir zur Gleichung

(4) $$\int_a^u \frac{f(s)}{(u-s)^{1-\alpha}}ds = \int_a^u \frac{ds}{(u-s)^{1-\alpha}}\left[\int_a^s \frac{F(s,t)}{(s-t)^\alpha}x(t)dt\right]$$

$$= \int_a^u dt \int_t^u \frac{F(s,t)}{(u-s)^{1-\alpha}(s-t)^\alpha}x(t)ds = \int_a^u \left[\int_t^u \frac{F(s,t)}{(u-s)^{1-\alpha}(s-t)^\alpha}ds\right]x(t)dt, \qquad \text{wobei } a \le u.$$

Der Kern dieser Gleichung ist $V_1(u,t) := \int_t^u \dfrac{F(s,t)}{(u-s)^{1-\alpha}(s-t)^\alpha}ds$ $(a \le t < u)$.

Führen wir hier die neue Integrationsvariable φ mit Hilfe der Formel $s = \dfrac{u+t}{2} + \dfrac{u-t}{2}\cos\varphi$ ein, so ergibt sich

(5) $$V_1(u,t) = \int_0^\pi \frac{F\left(\frac{u+t}{2} + \frac{u-t}{2}\cos\varphi, t\right)}{(1+\cos\varphi)^\alpha(1-\cos\varphi)^{1-\alpha}}\sin\varphi d\varphi.$$

Das Integral auf der rechten Seite formen wir um:

(6) $$\int_0^\pi \frac{(1-\cos\varphi)^{\alpha-1}}{(1+\cos\varphi)^\alpha}\sin\varphi d\varphi = \int_0^\pi 2^\alpha \sin^{2\alpha}\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin^{-2}\frac{\varphi}{2}\cdot\frac{1}{2^\alpha}\cos^{-2\alpha}\frac{\varphi}{2}\cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}d\varphi$$

$$=\int_0^{\pi}\sin^{2\alpha-2+1}\frac{\varphi}{2}\cos^{1-2\alpha}\frac{\varphi}{2}d\varphi=2\int_0^{\pi/2}\cos^{2-2\alpha-1}\varphi\sin^{2\alpha-1}\varphi d\varphi=\frac{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\alpha)}{\Gamma(1)}=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\neq 0\,.$$

Die Umformung des Integrals $f_1(u)$ (die linke Seite von (4)) durch partielle Integration liefert:

$$f_1(u):=\int_a^u\frac{f(s)}{(u-s)^{1-\alpha}}ds=\underbrace{-\frac{1}{\alpha}(u-s)^{\alpha}f(s)\,|_a^u}_{=0}+\frac{1}{\alpha}\int_a^u(u-s)^{\alpha}f'(s)ds=\frac{1}{\alpha}\int_a^u(u-s)^{\alpha}f'(s)ds\,.$$

Die linke Seite der Integralgleichung (4) besitzt also die stetige Ableitung $f'(u)$. Somit hat die Integralgleichung (4) unter den angegebenen Voraussetzungen eine stetige Lösung $x(t)$.

Eine der ersten Integralgleichungen, die in Anwendung aufgetreten ist und gelöst wurde, ist die Integralgleichung (3) mit $\alpha=\frac{1}{2}$ und $F(s,t)=1.$ Dann ist

$$V_1(u,t)=\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}}(1-\cos\varphi)^{-\frac{1}{2}}\sin\varphi d\varphi=\pi\,.$$

Daher nimmt (4) die Gestalt $\pi\int_0^u x(t)dt=\int_0^u\frac{f(s)}{\sqrt{u-s}}ds$ an. Differenziert man diese Beziehung nach *u*, so ergibt sich $x(u)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{du}\int_0^u\frac{f(s)}{\sqrt{u-s}}ds$. Wenn f stetig differenzierbar ist, ergibt sich durch partielle Integration

$$x(u)=\frac{1}{\pi}\frac{d}{du}\left(2\sqrt{u}f(0)+2\int_0^u\sqrt{u-s}\,f'(s)ds\right)=\frac{f(0)}{\pi\sqrt{u}}+\frac{1}{\pi}\int_0^u\frac{f'(s)}{\sqrt{u-s}}ds\,.$$

Wenn in (2) $F(s,t)\equiv 1$ $(a\le t\le s)$ und α eine beliebige zwischen 0 und 1 liegende Zahl ist, heißt (3) die *verallgemeinerte Abelsche Integralgleichung*. In diesem Fall ist nach (5) der Kern V_1 gleich $V_1(u,t)=\int_0^{\pi}(1+\cos\varphi)^{-\alpha}(1-\cos\varphi)^{\alpha-1}\sin\varphi d\varphi=\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}$, wenn wir (6) beachten. Demzufolge nimmt in diesem Fall (4) die Gestalt $\frac{\pi}{\sin\pi\alpha}\int_0^u x(t)dt=\int_a^u\frac{f(s)}{(u-s)^{1-\alpha}}ds$ $(a\le u)$ an, woraus (angenommen, dass f' existiert und stetig ist) die Lösung

$$x(u)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\frac{d}{du}\int_a^u\frac{f(s)}{(u-s)^{1-\alpha}}ds=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\left[\frac{f(0)}{u^{1-\alpha}}+\int_0^u\frac{f'(s)}{(u-s)^{1-\alpha}}ds\right]\qquad\text{folgt.}$$

Literatur: **Fenyö, S., Stolle, H.W.** (1984): Theorie und Praxis der linearen Integralgleichungen 3

Smirnow, W.I. (1981): Lehrgang der höheren Mathematik 2

Gorenflo, R., Vessella, S. (1991): Abel Integral Equations