Seminar: Integralgleichungen
Num. Behandlung Fredholmscher IGl 2.Art
Teil 2: Das Nyström-Verfahren

Timo Sartor

1 Numerische Integration (Quadratur)

Sei $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$Q(g) := \int_a^b g(y)dy$$

wird approximiert durch:

$$Q_n(g) := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(n)} g(x_j^{(n)})$$

mit $x_1^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} \in [a, b]$ Quadraturpunkte,
$\alpha_1^{(n)}, \ldots, \alpha_n^{(n)} \in \mathbb{R}$ Quadraturgewichte.

Die *zusammengesetzte Trapezregel* wird definiert durch:

$$Q_n(g) := \frac{(b-a)}{n-1}\left(\frac{1}{2}g(x_1^{(n)}) + g(x_2^{(n)}) + \cdots + g(x_{n-1}^{(n)}) + \frac{1}{2}g(x_n^{(n)}) \right)$$

mit den Quadraturpunkten $x_j^{(n)} := a + (j-1)h$ mit $h := \frac{b-a}{n-1}$.

Theorem 1.1 *Sei $g \in C^2[a, b]$*
Dann kann der Fehler $R_T(g) := \int_a^b g(y)dy - Q_n(g)$ für die zusammengesetzte Trapezregel abgeschätzt werden durch: $|R_T(g)| \leq \frac{1}{12}h^2(b-a)\,\|g''\|_\infty$

Definition 1.2 Eine Folge (Q_n) von Quadraturformeln heißt *konvergent*, wenn $Q_n(g) \longrightarrow Q(g)$,$n \to \infty$, für alle $g \in C([a, b])$

Theorem 1.3 *Die Quadraturformeln (Q_n) konvergieren genau dann, wenn $Q_n(g) \longrightarrow Q(g), n \to \infty$, für alle g in einem dichten Unterraum $U \subset C([a, b])$ und*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{j=1}^{n} |\alpha_j^{(n)}| < \infty$$

2 Nyström-Verfahren

Betrachte die Fredholmsche IGl 2.Art: $\phi - A\phi = f$
mit dem Operator $(A\phi)(x) = \int_a^b K(x,y)\phi(y)dy$, mit stetigem Kern K
$A\phi$ wird approximiert durch

$$(A_n\phi)(x) := Q_n(K(x,\cdot)\phi(\cdot)) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} K(x, x_k^{(n)})\phi(x_k^{(n)})$$

Theorem 2.1 *Sei $\phi^{(n)}$ Lösung von*

$$\phi^{(n)}(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} K(x, x_k)\phi^{(n)}(x_k) = f(x) \ , x \in [a,b] \tag{1}$$

Dann erfüllen die Werte $\phi_j^{(n)} := \phi^{(n)}(x_j), j = 1 \dots n$, an den Quadratur-Punkten das LGS

$$\phi_j^{(n)} - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^{(n)} K(x_j, x_k)\phi_k^{(n)} = f(x_j) \ , j = 1 \dots n \tag{2}$$

Umgekehrt, falls $\phi_j^{(n)}, j = 1 \dots n$, Lösung von (2) ist, so ist die Funktion

$$\phi^{(n)}(x) := f(x) + \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^{(n)} K(x, x_k)\phi_k^{(n)} \tag{3}$$

Lösung der Gleichung (1)

Theorem 2.2 *Angenommen, die Quadraturformeln (Q_n) sind konvergent. Dann ist die Folge der Operatoren (A_n) kollektiv kompakt und punktweise konvergent*

Korollar 2.3 *Für eine eindeutig lösbare Fredholmsche IGl 2.Art mit stetigem Kern und stetiger rechter Seite ist das Nyström-Verfahren mit konvergenter Quadraturfolge gleichmäßig konvergent.*

Beweis: Die Behauptung folgt aus Theorem 2.2 und Vortrag 1 (Satz 2.6)