Seminar: Integralgleichungen (WS 06/07)

Riemann-Hilbert-Problem: Singuläre Integralgleichungen Teil 1

SHENG LIU
11.12.2006

1. Hölder-stetig

Definition 1.1 Sei $G \subset \mathbb{R}^m$, eine Funktion $\varphi : G \to \mathbb{C}$ heißt Hölder-stetig mit Hölder-Exponent $0 < \alpha \le 1$, falls eine Konstante C existiert mit

$$|\varphi(x) - \varphi(y)| \le C|x - y|^\alpha, \forall x, y \in G.$$

Wir bezeichnen $C^{0,\alpha}(G)$ als der lineare Raum von allen auf G definierten Funktionen, die beschränkt und Hölder-stetig mit Exponent α sind.
$C^{0,\alpha}(G)$ heißt der Hölder-Raum.

Bemerkung: Jede Hölder-stetige Funktion ist auch gleichmäßig stetig.

Theorem 1.2 Der Hölder-Raum $C^{0,\alpha}(G)$ ist ein Banach-Raum mit der Norm:

$$\|\varphi\|_\alpha := \sup_{x \in G} |\varphi(x)| + \sup_{x, y \in G, x \ne y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|}{|x - y|^\alpha}$$

Lemma 1.3 Seien $|\varphi(x)| \le M, \forall x \in G$ und $|\varphi(x) - \varphi(y)| \le C|x - y|^\alpha \forall x, y \in G$ mit $|x - y| \le a$ mit Konstanten a, C, M und $0 < \alpha \le 1$. Dann gilt:

$$\varphi \in C^{0,\alpha}(G) \text{ mit } \|\varphi\|_\alpha \le M + \max(C, \frac{2M}{a^\alpha}).$$

2. Der Cauchysche Integraloperator

D_- : ein beschränktes und einfach zusammenhängendes Gebiet in einer komplexen Ebene
$D_+ := \mathbb{C} \setminus \bar{D}_-$, das unbeschränkte offene Komplement
$\Gamma := \partial D$, sei von der Klasse C^2
n : der Normalvektor, in Richtung nach D_+
Die Richtung der komplexen Integrale entlang der Kontur Γ sei gegen den Uhrzeigersinn

2.1 Definition Das Cauchysche Integral ist für Hölder-stetige φ definiert durch

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad, z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma, \varphi \in C(\Gamma)$$

Bemerkung:

Das Cauchysche Integral ist holomorph in D_+ und D_-

2.2 Theorem Für $\varphi \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$ existiert das Cauchysche Integral als **der Cauchysche Hauptwert** für alle $z \in \Gamma$, d.h.

der Limes: $\lim_{\rho\to 0}\int_{\Gamma\setminus\Gamma(z;\rho)} \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ existiert mit $\Gamma(z;\rho) := \{\zeta \in \Gamma : |\zeta - z| \le \rho\}$.

2.3 Theorem (Sokhotski-Plemelj) Für $\varphi \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$, lässt sich das Cauchysche Integral

$$f(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad , z \in \mathbb{C}\setminus\Gamma \qquad (*)$$

Hölder-stetig fortsetzen von D_+ zu $\bar{D}_+$ und D_- zu $\bar{D}_-$ mit dem Limes:

$$f_\pm(z) := \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \mp \frac{1}{2}\varphi(z), \quad z \in \Gamma$$

wobei $f_\pm(z) = \lim_{h\to +0} f(z \pm hn(z))$ .Ferner gelten die Ungleichungen:

$\|f\|_{\alpha,\bar{D}_+} \le C\|\varphi\|_\alpha$, $\|f\|_{\alpha,\bar{D}_-} \le C\|\varphi\|_\alpha$ für eine Konstante $C(\alpha,\Gamma)$.

2.4 Korollar Der Cauchysche Integraloperator $A : C^{0,\alpha}(\Gamma) \to C^{0,\alpha}(\Gamma)$, definiert durch

$$A\varphi(z) := \frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\varphi(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \ , \ z \in \Gamma$$

ist beschränkt. Der Kern von dem Operator A heißt der Cauchysche Kern.

2.5 Theorem Sei $\varphi \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$, dann existiert eine eindeutige Funktion f, die in D_+ und D_- holomorph ist, die stetig von D_+ zu $\bar{D}_+$ und D_- zu $\bar{D}_-$ fortgesetzt werden kann mit der Rand-. bedingung: $f_- - f_+ = \varphi$ auf Γ und $f(z) \to 0, z \to \infty$. Diese Funktion ist gegeben durch ($*$).

2.6 Theorem Sei $\varphi \in C^{0,\alpha}(\Gamma)$ gegeben, es existiert eine Funktion f, die holomorph in D_- und stetig in $\bar{D}_-$ ist mit dem Randwert $f = \varphi$ auf Γ genau dann, wenn φ die Gleichung: $\varphi - A\varphi = 0$ löst. Diese Lösung ist gegeben durch ($*$).

2.7 Theorem Der Cauchysche Integraloperator A erfüllt $A^2 = I$.

Literatur:

R.Kress (1989): Linear Integral Equations
N.I.Muschelischwili (1965): Singuläre Integralgleichungen
W.Hackbusch (1997): Integralgleichungen
R.Remmert,G.Schumacher (2001): Funktionentheorie 1