Seminar: Integralgleichungen
Radontransformation und Radonsche Integralgleichung

Julia Schierle

27.11.2006

1 Allgemeines

- Normalform einer Hyperebene H:
  $H(p,\Theta) = \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \Theta = p, p \in \mathbb{R}, \Theta \in S^{n-1}\}$
- Radontransformierte Rf:
  $Rf(p,\Theta) = \int\limits_{x\cdot\Theta=p} f(x)d\sigma(x),\ f \in S(\mathbb{R}^n)$
- $\mathbb{P}^n$: Menge aller Hyperebenen in $\mathbb{R}^n$

2 Differenzierbarkeit

Wir bezeichnen für festes Θ:
$R_\Theta f(p) = Rf(p,\Theta)$
$R_\Theta f$ ist nach p differenzierbar
$\Rightarrow R_\Theta[\frac{\partial f}{\partial y}] = y \cdot \Theta \frac{\partial R_\Theta f}{\partial p}$
$\rightarrow y = e_i$: $R[\frac{\partial f}{\partial x_i}] = \Theta_i \frac{\partial Rf}{\partial p}$
$\rightarrow$Multiindex $\alpha \in \mathbb{N}^n$: $\Rightarrow R_\Theta D^\alpha f = \Theta^\alpha D^{|\alpha|} R_\Theta f$
$\Leftrightarrow R[D^\alpha f](p,\Theta) = \Theta^\alpha \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial p^{|\alpha|}} Rf(p,\Theta)$

Satz:

Mit den Bezeichnungen $\Delta = \sum\limits_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ und $\Delta_p = \frac{\partial^2}{\partial p^2}$ gilt:

$R\Delta = \Delta_p R$

Definition

Der Schwartzraum $S(\mathbb{R}\times S^{n-1})$ besteht aus allen beliebig oft differenzierbaren Funtionen $\varphi : \mathbb{R}\times S^{n-1} \to \mathbb{C}$, für die gilt:

$\underset{p\in\mathbb{R},\Theta\in S^{n-1}}{sup} (p+1)^m \left| \frac{\partial^k}{\partial p^k} D\varphi(p,\Theta) \right| < \infty$

für jedes $m \in \mathbb{N}$,$k\in \mathbb{N}$ und jeden Differentialoperator D auf S^{n-1}. Der Schwartzraum $S(\mathbb{P}^n)$ besteht aus allen Funktionen auf $\mathbb{P}^n$, die mit geraden Funktionen aus $S(\mathbb{R} \times S^{n-1})$ identifiziert sind.

Lemma

Für jedes $f \in S(\mathbb{R}^n)$ und jedes $k\in \mathbb{N}$ ist das Integral

$m_k(\Theta) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p^k Rf(p,\Theta)dp$

ein homogenes Polynom in Θ vom Grad k.

Definition

$S_H(\mathbb{P}^n) = \{f \in S(\mathbb{P}^n) : m_k$ ist homogenes Polynom vom Grad k $\forall k\in \mathbb{N}\}$

Satz

Die Radontransformation ist ein linearer Isomorphismus von $S(\mathbb{R}^n)$ nach $S_H(\mathbb{P}^n)$.

3 Faltung

Satz

Sei $f = f_1 \star f_2$ dann gilt:

$\Rightarrow R_\Theta[f_1 \star f_2] = R_\Theta f_1 \star R_\Theta f_2$

4 Projektionssatz

Satz

Es ist für jedes $f \in S(\mathbb{R}^n)$
$\mathcal{F}_{p\to t}[R_\Theta f](t) = \mathcal{F}[f](t\Theta)$

5 Rücktransformation

Formel für Umkehrung der Radontransformation:
$f(x) = \mathcal{F}^\star_{t\Theta\to x}\mathcal{F}_{p\to t}[R_\Theta f](t)$
Nach einigen weiteren Transformation mit $g = Rf$:
$\Rightarrow f(x) = \frac{(n-1)!}{(-j)^n} \int\limits_{S^{n-1}} \left(\lim_{\varepsilon\to+0} \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{g(p,\Theta)dp}{(\Theta\cdot x - p + i\varepsilon)^n} \right) d\sigma(\Theta)$

6 Integralgleichung

Die Mittelung $M_{x_0}(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} f(x_0 + re_\varphi)d\varphi$ mit $e_\varphi = (cos\varphi, sin\varphi)$ und $r > 0$ soll durch die Mittelung der Radontransformierten Funktion
$F_{x_0}(r) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} Rf(G_{r,\varphi})d\varphi$ mit $G_{r,\varphi} = \{x \in \mathbb{R}^2 : (x - x_0)\cdot e_\varphi = r\}$und $r > 0$
ausgedrückt werden.
Wir betrachten den Fall $x_0 = 0$:
$G_{r,\varphi} = \{x = re_\varphi + te^T_\varphi, t \in \mathbb{R}\}$ bzw
$F(r) = \int\limits_{r^2}^{\infty} \frac{M(\sqrt{\tau})}{\sqrt{\tau - r^2}} d\tau$
Substitution: $\tilde{F}(r^2) = F(r)$ oder $\tilde{F}(q) = F(\sqrt{q})$ bzw $\tilde{M}(\tau) = M(\sqrt{\tau})$
$\Rightarrow$Radonsche Integralgleichung: $\tilde{F}(q) = \int\limits_q^{\infty} \frac{\tilde{M}(\tau)}{\sqrt{\tau - q}} d\tau$ mit $q \geq 0$.
$\Rightarrow$Lösung mit Hilfe der Abelschen Integralgleichung: $\tilde{M}(\tau) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_\tau^{\infty} \frac{\tilde{F}'(q)}{\sqrt{q - \tau}} dq$
$\Rightarrow f(x_0) = \tilde{M}(0) = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{\tilde{F}'(q)}{\sqrt{q}} dq = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\infty} \frac{F'(r)}{r} dq$