Die Integralgleichungsmethode für die 3D-Helmholtzgleichung

Susanne Schmitt

13.11.2006

1 Einleitung

Die *Helmholtzgleichung* lautet

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

Die Konstante $k \in \mathbb{C}$ nennt man *Wellenzahl*. Ziel ist es, Randwertprobleme mit der Helmholtzgleichung in Fredholmsche Integralgleichungen zu überführen. Dazu benötigen wir die folgende Generalvoraussetzung:

Voraussetzung 1 (Generalvoraussetzung) *Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ offen und beschränkt, sei $\partial\Omega \in C^2$. $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ sei zusammenhängend. Für k gelte $Re\{k\} > 0$ und $Im\{k\} \geq 0$.*

Damit existiert in jedem $x \in \partial\Omega$ der äußere Normaleneinheitsvektor $n(x)$. Für eine abgeschwächte Form der Normalableitung auf dem Rand führen wir die folgende Abkürzung ein:

$$\mathcal{N}(\Omega) = \{u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}) : \; \frac{\partial u}{\partial n} := \lim_{\epsilon \to 0} n(x) \cdot \nabla u(x - \epsilon n(x)) \text{ glm. bzgl. } x \in \partial\Omega\}$$

Satz 2 (Greensche Formeln) *Seien u, $v \in \mathcal{N}(\Omega)$. Dann gilt:*

$$\int_\Omega [u\Delta v + \nabla u \cdot \nabla v]\, dx = \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial v}{\partial n} do \tag{1}$$

$$\int_\Omega [u\Delta v - v\Delta u]\, dx = \int_{\partial\Omega} \left[u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right] do \tag{2}$$

Definition 3 *Eine Funktion $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$ erfüllt die* Sommerfeldsche Ausstrahlbedingung (SAB) *wenn gilt:*

$$\lim_{|x| \to \infty} |x| \left(\frac{\partial u(x)}{\partial r} - iku(x) \right) = 0$$

gleichmäßig bzgl. aller Richtungen $\frac{x}{|x|}$.

Nun lassen sich vier Randwertprobleme formulieren, die im Folgenden untersucht werden:

(ID) *Inneres Dirichletproblem.* Sei $f \in C(\partial\Omega)$. Finde $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ mit

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= 0 \qquad &&\text{in } \Omega \\ u &= f \qquad &&\text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

(IN) *Inneres Neumannproblem.* Sei $f \in C(\partial\Omega)$. Finde $u \in \mathcal{N}(\Omega)$ mit

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= 0 \qquad &&\text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= f \qquad &&\text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

(ÄD) *Äußeres Dirichletproblem.* Sei $f \in C(\partial\Omega)$. Finde $u \in C^2(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}) \cap C(\mathbb{R}^3 \setminus \Omega)$ mit

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= 0 \qquad &&\text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} \\ u &= f \qquad &&\text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Außerdem erfülle u die SAB.

(ÄN) *Äußeres Neumannproblem.* Sei $f \in C(\partial\Omega)$. Finde $u \in \mathcal{N}(\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega})$ mit

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= 0 \qquad &&\text{in } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= f \qquad &&\text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

Außerdem erfülle u die SAB.

2 Rückführung auf Integralgleichungen

Zunächst folgen einige wichtige Definitionen:

Definition 4 *Die Funktion*

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|}, \; x \neq y$$

heißt Fundamentallösung *der 3D-Helmholtzgleichung.*

Bemerkung: Für die Fundamentallösung kann man beweisen:

(a) Für festes $y \in \mathbb{R}^3$ löst $\Phi(\cdot, y)$ die Helmholtzgleichung.

(b) $\Phi(\cdot, y)$ erfüllt die SAB.

(c) Gleiches gilt auch für die partiellen Ableitungen $\frac{\partial \Phi}{\partial y_j}$, $j = 1, 2, 3$

Definition 5 *Sei $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Dann heißen*

$$SL\varphi(x) := \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(y)\Phi(x,y)do(y), \qquad x \notin \partial\Omega$$
$$DL\varphi(x) := \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(y)\frac{\partial}{\partial n(y)}\Phi(x,y)do(y), \qquad x \notin \partial\Omega$$

Einfach- *bzw.* Doppelschichtpotential.

Bemerkung: Auch hier kann gezeigt werden: $SL\varphi$ und $DL\varphi$ erfüllen die Helmholtzgleichung und die SAB.

Um später Ergebnisse aus der Fredholmtheorie verwenden zu können, braucht man den folgenden

Satz 6 *Sei $k : \{(x,y) \in \partial\Omega \times \partial\Omega \ : \ x \neq y\} \longrightarrow \mathbb{C}$ stetig oder schwach singulär, d.h. es existiert $\alpha \in [0,2)$ mit*

$$|k(x,y)| \leq |x-y|^{-\alpha} \qquad \forall x, y \in \partial\Omega, \ x \neq y$$

Dann ist $A : C(\partial\Omega) \longrightarrow C(\partial\Omega)$ mit

$$A\varphi(x) = \int\limits_{\partial\Omega} k(x,y)\varphi(y)do(y), \qquad x \in \partial\Omega$$

ein kompakter linearer Operator.

Beweis: siehe Literatur.

Definition 7 *Wir definieren die Operatoren $S, K : C(\partial\Omega) \longrightarrow C(\partial\Omega)$ durch*

$$S\varphi(x) := \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(y)\Phi(x,y)do(y), \qquad x \in \partial\Omega$$
$$K\varphi(x) := \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(y)\frac{\partial}{\partial n(y)}\Phi(x,y)do(y), \qquad x \in \partial\Omega$$

Lemma 8 *(a) : Bezüglich des Dualsystems $\langle C(\partial\Omega), C(\partial\Omega)\rangle$, $\langle\varphi,\psi\rangle = \int\limits_{\partial\Omega}\varphi\psi do$, ist S selbstadjungiert. Die Adjungierte zu K ist der Operator K^* mit*

$$K^*\varphi(x) = \int\limits_{\partial\Omega} \varphi(y)\frac{\partial}{\partial n(x)}\Phi(x,y)do(y)$$

(b) : S, K und K^* sind kompakte Operatoren.

Beweis: (a): nachrechnen; (b): z.z. Φ und $\frac{\partial}{\partial n}\Phi$ sind schwach singulär. Abschätzung z.B. mit Lemma 4.2 aus der Vorlesung.

Satz 9 (Greenscher Darstellungssatz) *Sei $u \in \mathcal{N}(\Omega)$ Lösung der Helmholtzgleichung in Ω. Dann gilt:*

$$\int\limits_{\partial\Omega} \left\{ u(y)\frac{\partial}{\partial n(y)}\Phi(x,y) - \Phi(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}(y) \right\} do(y) = \begin{cases} -u(x), & x \in \Omega \\ 0, & x \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} \end{cases}$$

Beweis: **1.Fall**: $x \notin \overline{\Omega}$. (2) liefert die Behauptung. **2.Fall**: $x \in \Omega$. Sei $\epsilon > 0$ so, dass $K(x;\epsilon) \subset \Omega$. Sei $D := \Omega \setminus K(x;\epsilon)$. Dann ist nach (2)

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_{\partial D} \left\{ u(y)\frac{\partial}{\partial n(y)}\Phi(x,y) - \Phi(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}(y) \right\} do(y) \\ &= \int\limits_{\partial\Omega} \left\{ u(y)\frac{\partial}{\partial n(y)}\Phi(x,y) - \Phi(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}(y) \right\} \\ &- \int\limits_{\partial K(x;\epsilon)} \left\{ u(y)\frac{\partial}{\partial n(y)}\Phi(x,y) - \Phi(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}(y) \right\} do(y) \end{aligned}$$

Man kann zeigen, dass der Ausdruck $\int\limits_{\partial K(x;\epsilon)} \left\{ u(y)\frac{\partial}{\partial n(y)}\Phi(x,y) - \Phi(x,y)\frac{\partial u}{\partial n}(y) \right\} do(y)$ für $\epsilon \to 0$ den Wert $-u(x)$ annimmt.

Satz 10 (Sprungbeziehungen) *Sei $\varphi \in C(\partial\Omega)$. Für das Einfach- und das Doppelschichtpotential gelten die folgenden Beziehungen:*

(a) $SL\varphi$ lässt sich zu einer stetigen Funktion im $\mathbb{R}^3$ forsetzen und es gilt

$$SL\varphi|_+ = SL\varphi|_- = S\varphi \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$$

(b) $DL\varphi|_\Omega$ und $DL\varphi|_{\mathbb{R}^3\setminus\overline{\Omega}}$ lassen sich zu stetigen Funktionen auf $\overline{\Omega}$ bzw. $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ fortsetzen und es gilt

$$DL\varphi|_\pm = \pm\frac{1}{2}\varphi + K\varphi \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$$

(c) Es gilt für die Normalableitung von $SL\varphi$

$$\frac{\partial}{\partial n}SL\varphi(x)|_\pm = \mp\frac{1}{2}\varphi(x) + K^*\varphi(x) \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$$

in dem Sinne, dass $\lim\limits_{\epsilon\to 0+} n(x)\cdot\nabla SL\varphi(x \pm \epsilon n(x)) = \mp\frac{1}{2}\varphi(x) + K^*\varphi(x)$ gleichmäßig bzgl. $x \in \partial\Omega$.

(d) *Für die Normalableitung von $DL\varphi$ gilt*

$$\frac{\partial}{\partial n} DL\varphi|_+ = \frac{\partial}{\partial n} DL\varphi|_- \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$$

in dem Sinne, dass $\lim_{\epsilon \to 0+} n(x) \cdot [\nabla DL\varphi(x + \epsilon n(x)) - \nabla DL\varphi(x - \epsilon n(x))] = 0$ *gleichmäßig bzgl.* $x \in \partial\Omega$*.*

Beweis: siehe Literatur.

Betrachte nun das (ID) und setze an:

$$u(x) = DL\varphi(x),\ x \in \Omega$$

Damit löst u die Helmholtzgleichung. Bleibt noch zu prüfen, für welche $\varphi \in C(\partial\Omega)$ u auch die Randbedingung $u = f$ erfüllt. Betrachte hierzu die Sprungbeziehung (b):

$$DL\varphi|_- = -\frac{1}{2}\varphi + K\varphi \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$$

Also muss gelten:

$$-\frac{1}{2}\varphi + K\varphi = f \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$$

Dies ist eine Fredholmsche Integralgleichung mit einem kompakten Operator K. Damit glt der folgende

Satz 11 $u = DL\varphi$ *ist genau dann Lösung des (ID), wenn* φ *die Integralgleichung*

$$-\frac{1}{2}\varphi + K\varphi = f \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$$

erfüllt.

Analog kann man auch die anderen Randwertprobleme in Integralgleichungen überführen:

(ID) Ansatz: $u(x) = DL\varphi(x)$, Integralgleichung: $-\frac{1}{2}\varphi + K\varphi = f \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$

(IN) Ansatz: $u(x) = SL\varphi(x)$, Integralgleichung: $\frac{1}{2}\varphi + K^*\varphi = f \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$

(ÄD) Ansatz: $u(x) = DL\varphi(x)$, Integralgleichung: $\frac{1}{2}\varphi + K\varphi = f \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$

(ÄN) Ansatz: $u(x) = SL\varphi(x)$, Integralgleichung: $-\frac{1}{2}\varphi + K^*\varphi = f \quad \text{auf} \quad \partial\Omega$

Man kann auch einen gemischten Ansatz der Form $u = DL\varphi + i\eta SL\varphi$ machen, was aber hier der Einfachheit halber nicht durchgeführt wird.

3 Existenz und Eindeutigkeit

Man kann zeigen, dass die beiden Außenraumprobleme eindeutig sind:

Satz 12 *Seien u_1, u_2 zwei Lösungen von (ÄD) oder (ÄN). Dann gilt: $u_1 = u_2$.*

Beweis: (1), SAB, Lemma von Rellich.

Ein entsprechender Satz gilt mit Einschränkung auch für die Innenraumprobleme:

Satz 13 *Sei $Im\{k\} > 0$. Dann besitzen (ID) und (IN) höchstens eine Lösung.*

Beweis: Sei $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ Lösung des homogenen RWP. Dann gilt nach (1):

$$0 = \int\limits_{\partial\Omega} \overline{u} \frac{\partial u}{\partial n} do = \int\limits_{\Omega} \{\overline{u}\Delta u + \nabla\overline{u}\nabla u\} dx = \int\limits_{\Omega} \{|\nabla u|^2 - k^2|u|^2\} dx$$

Wegen $Im\{k\} > 0$ ist dann

$$\int\limits_{\Omega} |u|^2 dx = 0 \Longrightarrow u \equiv 0 \qquad \text{in } \Omega \qquad \square$$

Für reelle Wellenzahlen gilt diese Aussage jedoch nicht. Um den letzten Satz zur Lösbarkeit des (ID) zu beweisen, benötigt man die Fredholmsche Alternative:

Satz 14 (Fredholmsche Alternative) *Sei $\langle X, Y\rangle$ ein Dualsystem und $A : X \longrightarrow X$ sowie $B : Y \longrightarrow Y$ kompakt und zueinander adjungiert. Dann gilt:*

(a) $dim(I - A) = dim(I - B) < \infty$.

(b) Die inhomogene Gleichung $\varphi - A\varphi = f$ ist genau dann lösbar, wenn gilt $\langle f, \psi\rangle = 0$ für alle $\psi \in Ker(I - B)$.

Beweis: siehe Literatur.

Satz 15 *Es sei $k > 0$ und $f \in C(\partial\Omega)$ gegeben. Das (ID) ist genau dann lösbar, wenn gilt:*

$$\int\limits_{\partial\Omega} f \frac{\partial v}{\partial n} do = 0$$

für alle $v \in \mathcal{N}(\Omega)$ mit $\Delta v + k^2 v = 0$ in Ω, $v|_- = 0$.

Beweis: $\Longrightarrow$: Sei u Lösung des (ID): $\Delta u + k^2 u = 0$ in Ω, $u|_- = f$. Sei $\Delta v + k^2 v = 0$ in Ω, $v|_- = 0$. Dann ist nach (2)

$$\int\limits_{\partial\Omega} f \frac{\partial v}{\partial n} do = \int\limits_{\partial\Omega} \left[u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right] do = \int\limits_{\Omega} \left[u\Delta v - v\Delta u \right] dx = 0$$

$\Longleftarrow$: Setze an : $u(x) = DL\varphi(x)$, $x \in \Omega$. Z.z. ist, die Integralgleichung $-\frac{1}{2}\varphi + K\varphi = f$ besitzt eine Lösung $\varphi \in C(\partial\Omega)$ (Dann ist u Lösung des (ID)).

Betrachte das Dualsystem

$$\langle C(\partial\Omega), C(\partial\Omega)\rangle,\ \langle\varphi,\psi\rangle = \int\limits_{\partial\Omega} \varphi\psi do$$

Bezüglich dieses Dualsystems ist K^* zu K adjungiert. Fredholmsche Alternative:

$$-\frac{1}{2}\varphi + K\varphi = f \text{ lösbar } \Longleftrightarrow \int\limits_{\partial\Omega} f\psi do = 0 \text{ f.a.} \psi \in C(\partial\Omega) \text{ mit } -\frac{1}{2}\psi + K^*\psi = 0$$

Definiere $v(x) := SL\psi(x)$ mit ψ als Lösung von $-\frac{1}{2}\psi + K^*\psi = 0$. Nach der 3. Sprungbeziehung gilt:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_+ = -\frac{1}{2}\psi + K^*\psi = 0$$

Also löst v das homogene (ÄN). Da das (ÄN) eindeutig ist, muss $v \equiv 0$ in $\mathbb{R}^3 \setminus \Omega$ sein. Das Einfachschichtpotential ist stetig, also ist auch $v|_- = 0$. Es gilt nun $v \in \mathcal{N}(\Omega)$, $\Delta v + k^2 v = 0$ und $v|_- = 0$. v erfüllt also die Voraussetzungen. Außerdem gilt:

$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_- = \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_- - \left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_+ = \psi$$

Also:

$$0 = \int\limits_{\partial\Omega} f\frac{\partial v}{\partial n} do = \int\limits_{\partial\Omega} f\psi do$$

Daraus folgt die Behauptung. $\square$

Ein entsprechender Satz gilt für die Lösbarkeit des (IN).