Seminar: Integralgleichungen (WS 06/07)

Numerische Behandlung der Fredholmschen Integralgleichung - Teil 1

Melanie Seifried

Erik Ivar Fredholm (1866 - 1927)
Schwedischer Mathematiker, der große Beiträge zur Theorie der partiellen Differentialgleichungen leistete und die moderne Theorie der Integralgleichungen begründete.

1 Theorie der Fredholmschen Integralgleichung

Definition 1.1 Sei $G \subset \mathbb{R}$ offene, beschränkte Menge und $y : \overline{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Sei
$k : \overline{G} \times \overline{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig oder
$k : (\overline{G} \times \overline{G}) \backslash D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $D = \left\{(t,t) : t \in \overline{G}\right\}$ schwach singulär, d.h. $\exists\ \alpha \in [0,1)$ und $\exists\ c > 0$ so dass $|k(t,s)| \leq c\ \ |t-s|^{-\alpha}\ \ \forall\ t \neq s$.
Dann heißt die Gleichung

$$x(t) - \int_{\overline{G}} k(t,s)x(s)ds = y(t) \quad , t \in \overline{G} \tag{1}$$

Fredholmsche Integralgleichung 2. Art.

Definition 1.2 Seien X,Y normierte Räume, $A : X \longrightarrow Y$ ein linearer Operator. A heißt *kompakt*, wenn für jede beschränkte Menge $M \subset X$ das Bild $A(M)$ relativ kompakt ist, d.h. wenn der Abschluss $\overline{A(M)}$ kompakt ist.

Satz 1.3 Der Integraloperator $A : \big(L^2(G), \|\cdot\|_{L^2}\big) \longrightarrow \big(L^2(G), \|\cdot\|_{L^2}\big)$ bzw. $A : \big(C(\overline{G}), \|\cdot\|_\infty\big) \longrightarrow \big(C(\overline{G}), \|\cdot\|_\infty\big)$ mit

$$Ax(t) = \int_{\overline{G}} k(t,s)x(s)ds$$

mit stetigem oder schwach singulären Kern ($\alpha \in [0, 1/2)$) ist kompakt.

Beweis: Siehe Literatur $\square$

Bemerkung:

Der Integraloperator der Fredholmschen Integralgleichung ist also kompakt. Gl. (1) lässt sich als Operatorgleichung schreiben:

$$\begin{aligned} x - Ax &= y \\ \Leftrightarrow (I - A)x &= y. \end{aligned}$$

Aus der Riesz-Theorie kann folgendes Resulat zur Lösbarkeit der Fredholmschen Integralgleichung gewonnen werden:

Satz 1.4 Sei X ein normiert Raum, $A : X \longrightarrow X$ ein kompakter Operator und $I - A$ sei injektiv.
Dann existiert der inverse Operator $(I - A)^{-1}$ und ist beschränkt.

Beweis: Siehe Literatur $\square$

Satz (1.4) kann im Bezug auf die Lösbarkeit von Integralgleichungen 2. Art umformuliert werden:

Korollar 1.5 Sei X ein normierter Raum und $A : X \longrightarrow X$ ein kompakter linearer Operator. Wenn die homogene Integralgleichung

$$x - Ax = 0$$

nur die triviale Lösung $x = 0$ besitzt, dann besitzt die Fredholmsche Integralgleichung 2. Art

$$x - Ax = y \tag{2}$$

für alle $y \in X$ eine eindeutige Lösung $x \in X$, die stetig von y abhängt.

2 Operator Approximation

Im weiteren Verlauf des Vortrages sei $L := I - A$.

Das Grundprinzip zum Approximieren einer Gleichung $Lx = y$ besteht darin, diese durch die Gleichung

$$L_n x_n = y_n \tag{3}$$

zu ersetzten. Hierbei gilt $y_n \to y,\ \ n \to \infty$ und L_n ist eine Folge beschränkter, linearer Operatoren. Die Approximationsgleichungen werden so gewählt, dass sie auf ein endlichdimensionales lineares System reduziert werden können. Im Folgenden werden Resultate für Konvergenzverhalten und Fehlerabschätzungen für den Fall abgeleitet, dass die Folge der Operatoren entweder normkonvergent oder punktweise konvergent ist.

2.1 Approximation mittels Norm-Konvergenz

Satz 2.1 Seien X und Y Banachräume und sei $L : X \longrightarrow Y$ ein beschränkter linearer Operator mit einer beschränkten Inversen $L^{-1} : Y \longrightarrow X$.
Die Folge $L_n : X \longrightarrow Y$ von beschränkten linearen Operatoren seien *normkonvergent*, also $\|L_n - L\| \to 0$, $n \to \infty$.
Dann existieren für alle n mit

$$\|L^{-1}(L_n - L)\| < 1 \tag{4}$$

die inversen Operatoren $L_n^{-1} : Y \longrightarrow X$. Diese sind beschränkt und es gilt

$$\|L_n^{-1}\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{1 - \|L^{-1}(L_n - L)\|}. \tag{5}$$

Für die Lösungen der Gleichungen

$$Lx = y \quad \text{und} \quad L_n x_n = y_n$$

gilt die Fehlerabschätzung

$$\|x_n - x\| \leq \frac{\|L^{-1}\|}{1 - \|L^{-1}(L_n - L)\|} \left(\|(L_n - L)x\| + \|y_n - y\|\right). \tag{6}$$

Beweis: Der Satz wird mit Hilfe der Neumann'schen Reihe bewiesen:

Satz 2.2 Sei X ein Banachraum, $A : X \longrightarrow X$ ein beschränkter linearer Operator mit $\|A\| < 1$ und sei $I : X \longrightarrow X$ die Identität.
Dann besitzt $I - A$ eine beschränkte Inverse auf X, die durch die *Neumann'sche Reihe* gegeben ist:

$$(I - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} A^k.$$

Es gilt

$$\|(I-A)^{-1}\| \leq \frac{1}{1-\|A\|}$$

Die Operatoren A^n sind definiert durch $A^0 := I$ und $A^n := AA^{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$.

□

Bemerkung:

Mit Satz (2.1) kann also von der eindeutigen Lösbarkeit der Gleichung $Lx = y$ auf die eindeutige Lösbarkeit der approximierten Gleichung geschlossen werden. Vorausgesetzt, dass die Approximation die Kontraktionsbedingung (4) erfüllt.

Die Genauigkeit der Approximation hängt davon ab, wie gut $L_n x$ Lx für die exakte Lösung approximiert:

Folgerung 2.3 Unter den Voraussetzungen von Satz (2.1) gilt für hinreichend großen n und eine Konstante C die Fehlerabschätzung

$$\|x_n - x\| \leq C\left(\|(L_n - L)x\| + \|y_n - y\|\right). \tag{7}$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus Satz (2.1). □

2.2 Approximation mittels punktweiser Konvergenz

Definition 2.4 Seien X,Y normierte Räume. Eine Menge $\mathcal{A} = \{A : X \longrightarrow Y\}$ von linearen Operatoren heißt *kollektiv kompakt*, wenn für jede beschränkte Menge $U \subset X$ die Bildmenge $\mathcal{A}(U) = \{Ax : x \in U, A \in \mathcal{A}\}$ relativ kompakt ist.

Bemerkung:

- Jeder Operator in einer kollektiv kompakten Menge ist kompakt.
- Jede endliche Menge kompakter Operatoren ist kollektiv kompakt.
- Eine Folge (A_n) wird kollektiv kompakt genannt, wenn die zugehörige Menge kollektiv kompakt ist.
- Punktweise Konvergenz, also $A_n x \to Ax$, $n \to \infty$ für alle $x \in X$, einer kollektiv kompakten Folge impliziert die Kompaktheit des Grenzoperators, da

$$A(U) \subset \overline{\{A_n x : x \in U, n \in \mathbb{N}\}}.$$

Satz 2.5 Sei X ein Banachraum und $A_n : X \longrightarrow X$ eine Folge von Operatoren, die kollektiv kompakt und punktweise konvergent sind, d.h. $A_n x \to Ax$, $n \to \infty$ für alle $x \in X$. Der Grenzoperator sei gegeben durch $A : X \longrightarrow X$.
Dann gilt

$$\|(A_n - A)A\| \to 0 \quad \text{und} \quad \|(A_n - A)A_n\| \to 0, \;\; n \to \infty. \tag{8}$$

Beweis: Siehe Literatur □

Satz 2.6 Sei X ein Banachraum, $A : X \longrightarrow X$ ein kompakter linearer Operator und sei $I - A$ injektiv. Die Folge $A_n : X \longrightarrow X$ sei kollektiv kompakt und punktweise konvergent, d.h. $A_n x \to Ax$, $n \to \infty$ für alle $x \in X$. Dann existiert für alle n mit

$$\|(I - A)^{-1}(A_n - A)A_n\| < 1 \tag{9}$$

die Inverse $(I - A_n)^{-1}$ und diese ist beschränkt durch

$$\|(I - A_n)^{-1}\| \leq \frac{1 + \|(I - A)^{-1}A_n\|}{1 - \|(I - A)^{-1}(A_n - A)A_n\|}. \tag{10}$$

Für die Lösungen der Gleichungen

$$x - Ax = y \quad \text{und} \quad x_n - A_n x_n = y_n$$

gilt die Fehlerabschätzung

$$\|x_n - x\| \leq \frac{1 + \|(I - A)^{-1}A_n\|}{1 - \|(I - A)^{-1}(A_n - A)A_n\|} \left(\|(A_n - A)x\| + \|y_n - y\|\right). \tag{11}$$

Bemerkung:

Die eindeutige Lösbarkeit der approximierten Gleichung leitet sich analog zu Satz (2.1) ab.

Ebenfalls analog:

Folgerung 2.7 Unter den Voraussetzungen von Satz (2.6) gilt für hinreichend großen n und eine Konstante C die Fehlerabschätzung

$$\|x_n - x\| \leq C \left(\|(A_n - A)x\| + \|y_n - y\|\right). \tag{12}$$

Beweis: Folgt unmittelbar aus Satz (2.6). □

Literatur

[1] R. Kress. *Linear Integral Equations.* Applied Mathematical Sciences. Springer Verlag.

[2] Vorlesungsmitschrieb: *Integralgleichungen.* SS 2006, Universität Karlsruhe.