Seminar: Integralgleichungen (WS 06/07)

Numerische Behandlung der Fredholmschen Integralgleichung 2.Art - Teil 3

Kathrin Wolpensinger

1 Projektionen

Definition 1.1 Sei X ein normierter Raum und $U \subset X,\ U \neq \emptyset$, ein Unterraum. Ein linearer beschränkter Operator $P : X \to U$ mit der Eigenschaft $P\varphi = \varphi$ für alle $\varphi \in U$ heißt *Projektionsoperator* von X auf U.

Theorem 1.2 Ein nichttrivialer beschränkter linearer Operator P, der einen normierten Raum X in sich selbst abbildet, ist ein Projektionsoperator, genau dann wenn $P^2 = P$. Für Projektionsoperatoren gilt $\|P\| \geq 1$.

Beispiel 1.3 *Projektion von $C[0,1]$ auf stückweise lineare Splines auf $[0,1]$*
Wähle $x_j = \frac{j}{n},\ j = 0, \ldots, n$, auf $[0,1]$.
U_n sei der Raum der stetigen Funktionen auf $[0,1]$, die auf jedem Intervall $[x_{j-1}, x_j]$, $j = 1, \ldots, n$, linear sind.
Dann hat die Projektion von $C[0,1]$ auf U_n die Form

$$(P_n\varphi)(x) = \sum_{j=0}^{n} \varphi(x_j) L_j(x)$$

mit $L_j(x) = n(x - x_{j-1}), \quad x \in [x_{j-1}, x_j], \quad j \geq 1$
$\qquad = n(x_{j+1} - x), \quad x \in [x_j, x_{j+1}], \quad j \leq n-1,$
$\qquad = 0,$ sonst.
Für diese Projektion gilt:

$$\|P_n\|_\infty = 1.$$

Theorem 1.4 Sei $\varphi \in C^2\,[0,1]$. Dann gilt für den Fehler der stückweise linearen Interpolation mit $x_j = \frac{j}{n},\ j = 0, \ldots, n$, die Abschätzung:

$$\|P_n\varphi - \varphi\|_\infty \leq \frac{1}{8}(\frac{1}{n})^2 \|\varphi''\|_\infty.$$

2 Projektionsverfahren

Definition 2.1 Sei X Banachraum und $(I - K) : X \to X$ ein injektiver beschränkter linearer Operator. Sei $X_n \subset X$ eine Folge von Unterräumen mit $dim X_n = n$ und seien $P_n : X \to X_n$ Projektionsoperatoren. Sei $f \in X$ gegeben.
Dann approximiert das Projektionsverfahren die Lösung $\varphi \in X$ der Gleichung

$$(I - K)\varphi = f$$

durch die Lösung $\varphi_n \in X_n$ der projizierten Gleichung

$$P_n(I - K)\varphi_n = \varphi_n - P_n K \varphi_n = P_n f.$$

Dieses Projektionsverfahren heißt *konvergent* für den Operator $(I - K)$, wenn ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert, so dass für jedes f die approximierte Gleichung genau eine Lösung $\varphi_n \in X_n$ besitzt für alle $n \geq n_0$ und diese Lösungen φ_n gegen die Lösung φ von $(I - K)\varphi = f$ konvergieren.

Theorem 2.2 Sei $K : X \to X$ kompakt und $(I - K)$ injektiv. Weiterhin erfüllen die Projektionsoperatoren $P_n : X \to X_n$ die Bedingung $\|P_n K - K\| \to 0, n \to \infty$.
Dann gilt für genügend große n, dass die Gleichung

$$\varphi_n - P_n K \varphi_n = P_n f$$

eindeutig lösbar ist für alle $f \in X$. Für den Fehler gilt die Abschätzung

$$\left\|\varphi_n - \varphi\right\| \leq \|(I - P_n K)^{-1}\| \, \|\varphi - P_n \varphi\| \, ,$$

wobei $\|(I - P_n K)^{-1}\| \leq c \|(I - K)^{-1}\|, \ c > 0.$