Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. T.Arens
Dipl.-Math.techn. S.Ritterbusch

Karlsruhe, den 30.06.2006

10. Übungsblatt
zur Vorlesung Integralgleichungen
im Sommersemester 2006

Aufgabe 28: Sei T ein kompakter, selbstadjungierter Operator im Hilbertraum X mit den Eigenwerten $\lambda_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$ und zugehörigen orthonormierten Eigenvektoren $x_n \in X$.

a) Zeigen Sie, dass für $\lambda \neq 0$ und $\lambda \neq \lambda_n$, $n \in \mathbb{N}$ die eindeutige Lösung von

$$(\lambda I - T)x = y, \quad y \in X$$

gegeben ist durch

$$(\lambda I - T)^{-1} y = \frac{1}{\lambda} \left(y + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda_n}{\lambda - \lambda_n} \langle y, x_n \rangle \, x_n \right).$$

Warum konvergiert diese Reihe?

b) Wenden Sie Teil a) an auf die Sturmsche Randwertaufgabe

$$x'' - \lambda x = f \quad \text{in } [0,1], \quad x(0) = x(1) = 0$$

mit $f \in C([0,1])$.

Aufgabe 29: Sei $\Omega = (0,\pi) \times (0,1) \subseteq \mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie zu $f \in C^1([0,\pi])$ mit $f(0) = f(\pi) = 0$ die Lösung u des Randwertproblems

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{auf } \{0,\pi\} \times (0,1) \\ u &= 0 \quad \text{auf } (0,\pi) \times \{0\} \\ u &= f \quad \text{auf } (0,\pi) \times \{1\}. \end{aligned}$$

(Hinweis: Separationsansatz)

Aufgabe 30:

a) Überprüfen Sie, dass die Greensche Funktion zum Laplace-Operator im Einheitskreis $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ durch

$$\Phi(x,y) = \frac{1}{2\pi} \Big(\ln \frac{1}{|x-y|} + \ln\big(\big| |y| x - \frac{y}{|y|} \big| \big) \Big)$$

gegeben ist.

b) Was ergibt der Darstellungssatz mit dieser Greenschen Funktion.