Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. T.Arens
Dipl.-Math.techn. S.Ritterbusch

Karlsruhe, den 7.7.2006

11. Übungsblatt
zur Vorlesung Integralgleichungen
im Sommersemester 2006

Das Neumann-Problem: Zu einem beschränkten Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ mit hinreichend regulärem Rand ist $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ gesucht mit

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \Omega \quad \text{und} \quad \frac{\partial}{\partial \nu} u = f \quad \text{auf } \partial\Omega.$$

Aufgabe 31: Zeigen Sie, wenn u, v Lösungen des Neumann-Problems sind, so ist $u - v$ konstant und es gilt

$$\int_{\partial\Omega} f \, ds = 0.$$

Aufgabe 32:

a) Formulieren Sie eine Integralgleichung zum Neumann-Problem mit Hilfe eines Einfachschichtpotenzialansatzes.

b) Zeigen Sie

$$\mathcal{N}\left(\frac{1}{2} I + K\right) = \operatorname{span}\{1\},$$

wobei K den zum Doppelschichtpotenzial gehörenden Operator auf $\partial\Omega$ bezeichnet. Die Eindeutigkeit des äußeren Dirichlet Problems, d.h. aus

$$\Delta u = 0 \quad \text{in } \mathbb{R}^2 \backslash \overline{\Omega} \quad \text{mit } u = 0 \text{ auf } \partial\Omega$$

und $u(x) = u_\infty + \mathcal{O}(1/|x|)$ folgt $u = 0$ in $\mathbb{R}^2 \backslash \overline{\Omega}$, kann ohne Beweis verwendet werden.

Aufgabe 33: Formulieren Sie nun einen Existenzsatz zum Neumann-Problem.
(Stichwort: Fredholmsche Alternative)