Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. T.Arens
Dipl.-Math.techn. S.Ritterbusch

Karlsruhe, den 14.7.2006

12. Übungsblatt
zur Vorlesung Integralgleichungen
im Sommersemester 2006

Aufgabe 34:

a) Berechnen Sie die Fouriertransformation zu

$$f(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| < a \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

b) Auf den Spuren Heisenbergs: Gegeben sei eine reellwertige Funktion $f \in \mathcal{S}$ mit $f(0) \neq 0$, $\mathcal{F}f(0) \neq 0$ und $f(t) = f(-t)$ (Signal). Durch

$$T = \frac{1}{f(0)} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\, dt, \quad B = \frac{1}{\mathcal{F}f(0)} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}f(w)\, dw$$

ist die Dauer bzw. die Bandbreite des Signals definiert. Berechnen Sie das Produkt TB.

Aufgabe 35: Die Hermiteschen Funktionen (nicht normiert) sind durch

$$\psi_n(t) = (-1)^n\, e^{\frac{1}{2}t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

gegeben. Zeigen Sie

a) Für $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ist

$$\frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2} = p_n(t) e^{-t^2}$$

mit einem Polynom p_n vom Grad n. Also ist $\psi_n \in \mathcal{S}$ und die ψ_n sind linear unabhängig.

b) Es gilt die Rekursionsgleichung

$$\psi_n(t) = t\psi_{n-1}(t) - \frac{d}{dt}\psi_{n-1}(t)$$

c) Die ψ_n, $n \in \mathbb{N}$, sind Eigenfunktionen der Fouriertransformation. Bestimmen Sie auch die Eigenwerte.

Aufgabe 36: Berechnen Sie zu $f \in \mathcal{S}$ eine Lösung x der Faltungsgleichung

$$\frac{n}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n|t-s|} x(s)\, ds = f(t)\,.$$

Wie verhält sich der Operator für $n \to \infty$?