Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. T.Arens
Dipl.-Math.techn. S.Ritterbusch

Karlsruhe, den 21.7.2006

13. Übungsblatt
zur Vorlesung Integralgleichungen
im Sommersemester 2006

Aufgabe 40: Beschreiben Sie die Lösung $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}$ des Anfangswertproblems

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad u(x,0) = f(x)$$

unter der Annahme, dass $u(.,t), f \in \mathcal{S}$ sind, durch ein Faltungsintegral.

Aufgabe 41: Der Vektorraum $BC(\mathbb{R})$ ausgestattet mit der punktweisen Multiplikation und der Supremumsnorm ist eine Banachalgebra.

a) Bestimmen Sie das Einselement in $BC(\mathbb{R})$ und charakterisieren Sie die regulären Elemente. Was ergibt sich, wenn wir auf die Beschränktheit der Funktionen verzichten.

b) Bestimmen Sie das Spektrum eines Elements $x \in BC(\mathbb{R})$.

Aufgabe 42: Sei $k \in L^1(\mathbb{R})$. Beweisen Sie, dass das Spektrum des Faltungsoperators $T_k \in \mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}), L^2(\mathbb{R}))$ mit Kern k durch

$$\sigma(T_k) = \overline{\{\mathcal{F}k(t) : t \in \mathbb{R}\}}$$

gegeben ist. Zeigen Sie zunächst die Zerlegung $T_k = \mathcal{F}^{-1} M_a \mathcal{F}$ mit dem Multiplikationsoperator, $M_a : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$ (s. Aufg 27) und $a = \mathcal{F}k$.