Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. T.Arens
Dipl.-Math.techn. S.Ritterbusch

Karlsruhe, den 05.05.2006

2. Übungsblatt zur Vorlesung Integralgleichungen im Sommersemester 2006

Aufgabe 4: Konstruieren Sie jeweils ein Beispiel, um folgende Aussagen zu belegen.

a) $C([-1,1])$ ist bzgl. der L^2-Norm nicht vollständig.

b) $C^1([-1,1])$ ist bzgl. der Maximumsnorm, $\|x\|_\infty = \max_{t\in[-1,1]} |x(t)|$, nicht vollständig.

c) Der Differentialoperator $D : C^1([0,1]) \to C([0,1])$ ist unstetig, wenn wir in beiden Räume, $C^1([0,1])$ und $C([0,1])$, die Maximumsnorm, $\|.\|_\infty$, betrachten.

Aufgabe 5: Seien X, Y normierte Räume, $A \in \mathcal{L}(X,Y)$ und $\tilde{X}, \tilde{Y}$ zugehörige Vervollständigungen von X bzw. Y. Zeigen Sie, dass es genau einen linearen, beschränkten Operator $\tilde{A} : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ gibt mit $\tilde{A}x \cong Ax$ für $x \in X$. Weiter überlegen Sie sich, dass $\|\tilde{A}\| = \|A\|$ gilt.

Aufgabe 6:

a) Sei X normierter Raum. Zeigen Sie, dass für ein lineares Funktional $\varphi : X \to \mathbb{R}$ mit $\varphi \neq 0$ folgende Bedingungen äquivalent sind.
(i) φ ist stetig
(ii) $\mathrm{Kern}(\varphi) = \{x \in X : \varphi(x) = 0\} \subseteq X$ ist abgeschlossen
(iii) $\mathrm{Kern}(\varphi)$ ist nicht dicht in X.

b) Sei $X = \{x \in C([-1,1]) : \ x \text{ ist in 0 diff'bar}\}$ mit der Maximumsnorm ausgestattet. Zeigen Sie, dass $\{x \in X : x'(0) = 0\}$ dicht liegt in X.