Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. T.Arens
Dipl.-Math.techn. S.Ritterbusch

Karlsruhe, den 19.05.2006

4. Übungsblatt zur Vorlesung Integralgleichungen im Sommersemester 2006

Aufgabe 10: Sei $0 < \alpha < \beta \leq 1$ und $G \subseteq \mathbb{R}^d$ kompakt. Zeigen Sie, dass die Einbettungsoperatoren

$$I_\beta : C^{0,\beta}(G) \to C(G)$$

und

$$I_{\alpha,\beta} : C^{0,\beta}(G) \to C^{0,\alpha}(G)$$

kompakt sind.
Hinweis: Satz von Arzela-Ascoli.

Aufgabe 11: Auf dem Raum X aller auf $\mathbb{R}_{>0}$ stetigen Funktionen mit $e^{-st}x(t)$ integrierbar über $\mathbb{R}_{>0}$ für $s > 0$ ist durch

$$\mathcal{L}x(s) = \int_0^\infty e^{-st} x(t)\, dt, \quad s > 0,$$

die Laplacetransformierte definiert.

a) Zeigen Sie, dass für das Faltungsprodukt

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(t-s)\, g(s)\, ds$$

folgende Identität gilt,

$$\mathcal{L}(f * g) = \mathcal{L}(f)\, \mathcal{L}(g).$$

b) Berechnen Sie mit Hilfe des Faltungsprodukts die Lösung der Abelschen Integralgleichung

$$\int_0^t \frac{x(s)}{\sqrt{t-s}}\, ds = 1.$$

Hinweis: Für $f(t) = 1$ ist $\mathcal{L}f(s) = 1/s$, und für $f(t) = t^{-1/2}$ gilt $\mathcal{L}f(s) = \sqrt{\pi} s^{-1/2}$.

Aufgabe 12: Sei $(BC(\mathbb{R}), \|.\|_\infty)$ der Raum aller auf $\mathbb{R}$ stetigen und beschränkten Funktionen, ausgestattet mit der Supremumsnorm. Ein Faltungsoperator $T : BC(\mathbb{R}) \to BC(\mathbb{R})$ sei definiert durch

$$Tx(t) = \int_{-\infty}^\infty k(t-s)\, x(s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R}$$

mit dem Kern

$$k(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } |t| \leq 1 \\ 0 & \text{sonst .} \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass T nicht kompakt ist.
Hinweis: Betrachten Sie die Folge $(Tx_n)_n$ mit $x_n(t) = x(t - n^2)$ für die stückweise definierte Funktion $x(s) = s^2 - 1$ für $|s| \leq 1$ und $x(s) = 0$ für $|s| > 1$.