Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. T.Arens
Dipl.-Math.techn. S.Ritterbusch

Karlsruhe, den 26.05.2006

5. Übungsblatt
zur Vorlesung Integralgleichungen
im Sommersemester 2006

Aufgabe 13:

a) Zeigen Sie, dass alle integrierbaren Lösungen der Integralgleichung

$$x(t) - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{t}x(s)\,ds = 0, \quad 0 < t < 1$$

durch $x(t) = at^{-1/2}$ mit $a \in \mathbb{R}$ gegeben sind.

b) Beweisen Sie, dass $A : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ mit

$$Ax(t) = \int_0^t \frac{1}{t}x(s)\,ds$$

beschränkt ist.
Hinweis: Cauchy-Schwarzsche Ungleichung anwenden auf

$$Ax(t) = \frac{1}{t}\int_0^1 s^{-\frac{1}{4}}\sqrt{\chi(\frac{s}{t})}\,s^{\frac{1}{4}}\sqrt{\chi(\frac{s}{t})}\,x(s)\,ds$$

mit $\chi(t) = 1$ für $t \leq 1$ und $\chi(t) = 0$ für $t > 1$.

c) Warum ist $A : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ nicht kompakt?
Hinweis: Für die Folge $x_n(t) = \frac{1}{\sqrt{n}}t^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{n})}$, gilt $\|x_n\|_{L^2} = 1$ und $\lim_{n\to\infty}\|(I - \frac{1}{2}A)x_n\|_{L^2} = 0$.

Aufgabe 14: Was bedeutet die Rieszsche Zahl bei einer quadratischen Matrix $L \in \mathbb{C}^{d\times d}$.

Aufgabe 15: Sei X normierter Raum, $A : X \to X$ kompakt und r die Rieszsche Zahl von $L = I - A$. Dann ist durch die direkte Summe

$$X = \mathcal{N}(L^r) \oplus L^r(X)$$

ein Projektionsoperator $P : X \to \mathcal{N}(L^r)$ definiert. Zeigen Sie, dass P kompakt und $L - P$ bijektiv ist.