Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. T.Arens
Dipl.-Math.techn. S.Ritterbusch

Karlsruhe, den 2.06.2006

6. Übungsblatt zur Vorlesung Integralgleichungen im Sommersemester 2006

Aufgabe 16: Sei

$$\begin{aligned} X &= \{x \in C((0,1]) : \exists\, M > 0, \alpha > -1 \\ &\qquad \text{mit } |x(t)| \leq M t^{\alpha} \quad \forall t \in (0,1]\} \end{aligned}$$

gegeben.

a) Zeigen Sie, dass X mit

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 t\, x(t)\, \overline{y(t)}\, dt$$

ein Prä-Hilbertraum ist.

b) Ist X vollständig?

c) Beweisen Sie, dass der Integraloperator $A : X \to X$ mit dem Kern

$$k(t,s) = \begin{cases} (t-1)s, & 0 \leq s \leq t \leq 1 \\ (s-1)t, & 0 \leq t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

kompakt ist.

Aufgabe 17: Es sei die Integralgleichung

$$\lambda x(t) - \int_{-1}^{1} (1 - |t-s|) x(s)\, ds = y(t)$$

für $y \in C([-1,1])$ gegeben. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von λ die Rieszsche Zahl des Operators $\lambda I - A$ mit $Ax(t) = \int_{-1}^{1} (1 - |t-s|) x(s)\, ds$.
Hinweis: Beachte $A = A^*$ bzgl. des L^2-Skalarprodukts.

Aufgabe 18: Sei durch

$$\langle f, g \rangle = g(0) \int_0^{2\pi} f(t)\, dt$$

eine Bilinearform $\langle .,. \rangle : C([0,2\pi]) \times C([0,2\pi]) \to \mathbb{R}$ definiert.

a) Bestimmen Sie ein $f \in C([0,2\pi])$ mit f(0)=1 und $\langle f, g \rangle = 0$ für alle $g \in C([0,2\pi])$.

b) Zeigen Sie, dass die linearen Operatoren $A, B \in \mathcal{L}\big(C([0,2\pi]), C([0,2\pi])\big)$ mit

$$A\varphi(t) = \varphi(0) f(t) \quad \text{und} \quad B\varphi(t) = 0$$

kompakt und bzgl. $\langle .,. \rangle$ adjungiert sind.

c) Warum gilt der 1. Fredholmsche Satz nicht?