Universität Karlsruhe (TH)
Mathematisches Institut II
Dr. T.Arens
Dipl.-Math.techn. S.Ritterbusch

Karlsruhe, den 9.06.2006

7. Übungsblatt zur Vorlesung Integralgleichungen im Sommersemester 2006

Aufgabe 19:

a) Es seien $a, b, g \in C(0,1)$ gegeben. Zeigen Sie, dass sich die lineare Differentialgleichung

$$x'' + ax' + bx = g$$

auf die Normalform

$$(px')' - qx = f$$

mit $p \in C^1(0,1)$, $p > 0$ und $q, f \in C(0,1)$ transformieren läßt.

b) Was ergibt diese Transformation im Fall der Tschebyscheffschen Differentialgleichung,

$$(1-t^2)x''(t) - tx'(t) + \lambda^2 x(t) = 0, \quad 0 < t < 1 \ ?$$

c) Transformieren Sie das Randwertproblem

$$(px')' - qx = f \quad \text{mit } x(0) = x_0 \text{ und } x(1) = x_1$$

auf eines mit homogenen Randbedingungen.

Aufgabe 20:

a) Finden Sie zu dem homogenen Randwertproblem

$$(px')' - qx = f \quad \text{mit } x(0) = x(1) = 0$$

mit p, q, f wie in Aufgabe 19 eine äquivalente Fredholmsche Integralgleichung.

b) Formulieren Sie die Fredholmsche Alternative für das Randwertproblem.

Aufgabe 21: Sei $(X, X, <.,.>)$ ein Dualsystem und $A \in \mathcal{K}(X,X)$ mit adjungiertem Operator $A^* \in \mathcal{K}(X,X)$. Sei weiter $\mathcal{N}(I-A) \neq \{0\}$. Zeigen Sie, dass die Operatoren $I-A$ und $I-A^*$ genau dann die Rieszsche Zahl $r = 1$ haben, wenn für je zwei Basen $\{\varphi_1, \ldots \varphi_m\}$ bzw. $\{\psi_1, \ldots \psi_m\}$ von $\mathcal{N}(I-A)$ bzw. bzw. $\mathcal{N}(I-A^*)$ die Gramsche Matrix $T \in \mathbb{C}^{m \times m}$ mit $T_{i,j} = \langle \varphi_i, \psi_j \rangle$ für $i, j = 1, \ldots, m$ regulär ist.