Universität Karlsruhe (TH)
Institut für Algebra und Geometrie
Dr. T.Arens
Dipl.-Math.techn. S.Ritterbusch

Karlsruhe, den 23.06.2006

9. Übungsblatt
zur Vorlesung Integralgleichungen
im Sommersemester 2006

Aufgabe 25: Seien X und Y Hilberträume, $T : X \to Y$ kompakt und $T^* : Y \to X$ der zu T adjungierte Operator. Zeigen Sie:

a) T^*T ist kompakter selbstadjungierter Operator und besitzt nur nichtnegative Eigenwerte.

b) Bezeichnen wir die positiven Eigenwerte mit λ_n, dann existieren Orthonormalsysteme $(x_n) \subseteq X$ und $(y_n) \subseteq Y$ mit $Tx_n = \sqrt{\lambda_n} y_n$ und $T^* y_n = \sqrt{\lambda_n} x_n$.

c) Berechnen Sie dieses sogenannte *singuläre System* (λ_n, x_n, y_n) für den Integraloperator

$$Tx(t) = \int_0^t x(s)\, ds, \quad t \in [0,1] \text{ und } x \in L^2(0,1).$$

Aufgabe 26: Es sei der Folgenraum

$$l_c = \{(x_j)_{j\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R} : x_j \neq 0 \text{ für nur endlich viele } j\}$$

gegeben mit dem Skalarprodukt

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j=1}^{\infty} x_j y_j.$$

Zu $n \in \mathbb{N}$ sei die Folge $e^{(n)}$ definiert durch $e_j^{(n)} = \delta_{nj}$.

a) Zeigen Sie, dass $\{e^{(n)} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq l_c$ ein vollständiges ONS ist.

b) Sei $(\lambda_n) \subseteq \mathbb{R}$ eine Folge mit $\lambda_n \to 1$ für $n \to \infty$ und $\lambda_n \neq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass der Operator $T : l_c \to l_c$ mit

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e^{(n)} \rangle\, e^{(n)}$$

beschränkt ist und berechnen Sie die Eigenwerte des Operators.

c) Zeigen Sie, dass der Operator $I - T$ bijektiv ist, aber $1 \in \sigma(T)$ gilt.

Aufgabe 27: Sei $a \in C([0,1])$. Zeigen Sie zum Multiplikationsoperator $M_a : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ mit $M_a x = ax$ die Identität

$$\sigma(M_a) = \{z \in \mathbb{C} : \exists t \in [0,1] \text{ mit } z = a(t)\}.$$