

Arbeitsblätter zu Inversen Problemen

Version vom 25.01.2007

Vorlesung: Prof. Dr. Andreas Kirsch¹

Dienstag 8:00-9:30 Seminarraum 33

Donnerstag 9:45-11:15 Seminarraum 33

Übung: Priv.-Doz. Dr. Natalia Grinberg²

Freitag 11:30-13:00 Seminarraum 31

Literatur zu der Vorlesung:

Primär

- A.Kirsch: *An introduction to the mathematical theory of inverse problems*. Applied Mathematical Sciences 120, Springer, 1996
- D.Colton and R.Kress: *Integral Equation Methods in Scattering Theory*. Wiley, New York etc., 1983
- F.Natterer: *The Mathematics of Computerized Tomography*. Teubner, Stuttgart, 1986
- A.Rieder: *Keine Probleme mit Inversen Problemen*. Vieweg, 2003

Ergänzend, weiterführend

- S.Helgason: *The Radon Transform*. Birkhäuser, 1980
- V.Palamodov: *Reconstructive integral geometry*. Birkhäuser, 2004
- V.Isakov: *Inverse Problems for Partial Differential Equations*. Berlin-Heidelberg-New York: Springer-Verlag, 1998
- J.B.Keller: *Inverse problems*. Amer. Math. Monthly 83 (1976), 107-118
- A.K.Louis: *Inverse und schlecht gestellte Probleme*. Teubner, Stuttgart, 1989

¹Sprechstunde Dienstags, 10.00 - 12.00 Uhr, Zimmer 208.2

²Sprechstunde Montags, 13:00 - 14:00 Uhr, Zimmer 204.2

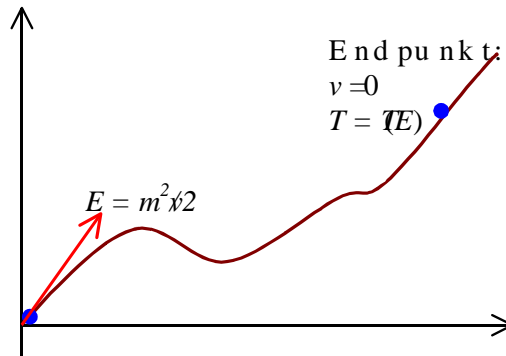
Inhalt

1	Ein historischer Ausflug: Das Abelsche Problem (1823)	3
1.1	Abelsche Integralgleichung	4
1.2	Lösung des Abelschen problems	6
1.3	Ein Sonderfall: Tautochrone	6
2	Gut und schlecht gestellte Probleme	8
2.1	Beispiel aus der Vorlesung	8
2.2	Beispiel 2	10
2.3	Beispiel 3	12
3	Kompakte Mengen und kompakte Operatoren	14
3.1	Kompakte und relativ kompakte topologische Räume	14
3.2	Sequenziell kompakte (Folgenkompakte) Mengen	14
3.3	Präkompakte (total beschränkte) metrische Räume	15
3.4	Kompakte lineare Operatoren	16
4	Worst case error	18
4.1	Wärmeleitung als glätternder Prozess	18
4.2	Worst case error für die Wärmeleitung	20
5	Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Faltungoperatoren	23
5.1	Der Hilbertraum $L^2(0, 2\pi)$	23
5.2	Eigenvektoren eines allgemeinen Faltungsoperators.	23
5.3	Einfachschichtpotential auf dem Kreis.	24
6	Fouriertransformation	27
6.1	Schwartzraum	27
6.2	Fouriertransformation	29
6.2.1	Kommutationsformeln	29
6.2.2	Fouriertransformation der Gaußschen Funktion	31
6.2.3	Rücktransformation	32
6.2.4	Fouriertransformation und die Faltung	35
6.2.5	Parsevalsche Gleichung	36
6.2.6	Fouriertransformation in $L^2(\mathbb{R})$	37
7	Verallgemeinerte Inverse und Regularisierung durch Filterung	38
7.1	Das Moore-Penrose-Inverse	38
7.2	Tychonoff-Phillips-Regularisierung	39
7.3	Asymptotische Regularisierung	41
8	Landweber-Iterationsverfahren	43
8.1	Tschebyscheff-Iterationsverfahren von Stiefel	43
8.1.1	Tschebyscheffsche Polynome 1.Art	43
8.1.2	Tschebyscheffsche Polynome 2.Art	45

9 Die Fundamentallösung der Helmholtzgleichung	48
9.1 Orthogonale Koordinatentransformationen.	48
9.1.1 Der Gradient	50
9.1.2 Die Divergenz	50
9.1.3 Die Rotation	52
9.1.4 Der Laplaceoperator	53
9.2 Die Punktquelle	54
10 Das Volumenpotential	57
10.1 Das Newton-Potential	57
10.2 Konvergenz des Volumenpotentials (10.1)	59
10.3 Lösung der inhomogenen Helmholtz-Gleichung mit Volumenpotentialansatz	62

1 Ein historischer Ausflug: Das Abelsche Problem (1823)

Ein Punkt mit Masse m wird vom Fuß eines Hügels hinauf geschubst mit der Anfangsenergie E . Er bewegt sich bis zum höchsten Punkt und rollt zurück.



Wir bezeichnen mit $T = T(E)$ die Laufzeit (Auf- und Abwärtsbewegungszeit) des Massenpunktes in Abhängigkeit von der Anfangsenergie E .

- Das Abelsche Problem besteht darin, die Form des Hügels aus der Funktion T zu rekonstruieren.

Seien $x(t)$, $y(t)$ die Koordinaten des Punktes in Moment $t \geq 0$, wobei $x(0) = y(0) = 0$ ist. Das Energieerhaltungsgesetz besagt:

$$\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + mgy = E. \quad (1.1)$$

Der Geschwindigkeitsvektor hat also die Länge $v = \sqrt{2\left(\frac{E}{m} - gy\right)}$. Sei s der natürliche Parameter längs der Kurve $C = \{(x(t), y(t)) : t \geq 0\}$. Die Vektoren $\frac{d}{dt}(x, y)^\top$ und $\frac{d}{ds}(x, y)^\top$ sind kollinear, wobei

$$\left\| \frac{d}{ds}(x, y)^\top \right\|^2 = \left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 \equiv 1$$

gilt. Daraus folgt

$$\frac{dy}{dt} = v \frac{dy}{ds} = \sqrt{2\left(\frac{E}{m} - gy\right)} \frac{dy}{ds}.$$

Wir setzen nun voraus, dass der Hügel monoton steigt, also die Funktion $s \mapsto y$ monoton steigend ist (genauso wie $t \mapsto y$). Dann ist

$$\frac{dt}{dy} = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{E}{m} - gy\right)}} \frac{ds}{dy}$$

und es gilt

$$T(E) = 2 \int_0^{y_{\max}} \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{E}{m} - gy\right)}} \frac{ds}{dy} dy = 2 \int_0^{y_{\max}} \frac{s'_y}{\sqrt{2g}\sqrt{\frac{E}{mg} - y}} dy = \sqrt{\frac{2}{g}} \int_0^{y_{\max}} \frac{s'_y}{\sqrt{\frac{E}{mg} - y}} dy.$$

Aus (1.1) finden wir $y_{\max} = E/(mg)$. Die Gleichung nimmt so die endgültige Form

$$T(E) = \sqrt{\frac{2}{g}} \int_0^{\frac{E}{mg}} \frac{s'_y}{\sqrt{\frac{E}{mg} - y}} dy$$

oder, nach der Substitution $\tilde{T}\left(\frac{E}{mg}\right) = \sqrt{\frac{g}{2}} T(E)$,

$$\tilde{T}(\tau) = \int_0^\tau \frac{s'_y}{\sqrt{\tau - y}} dy. \tag{1.2}$$

1.1 Abelsche Integralgleichung

Wir betrachten im Raum $X = C[0, \infty) \cap L_1[0, \infty)$ die **Abelsche Integralgleichung**

$$y = x * \frac{1}{\sqrt{t}}$$

oder, ausgeschrieben

$$y(t) = \int_0^t \frac{x(s)}{\sqrt{t-s}} ds = \int_0^t \frac{x(t-s)}{\sqrt{s}} ds. \tag{1.3}$$

Wie bei vielen Faltungsgleichungen, bietet sich hier die Fourier- bzw. Laplacetransformation an. Da es hier um die Funktionen auf der Halbachse handelt, verwenden wir die Laplacetransformation

$$L(f)(s) = \int_0^\infty e^{-ts} f(t) dt. \tag{1.4}$$

Es gilt

$$L(u * v) = L(u) L(v) \tag{1.5}$$

in X wegen

$$\begin{aligned} L(u * v)(s) &= \int_0^\infty e^{-ts} \left(\int_0^t u(t') v(t-t') dt' \right) dt = \int_{\mathbb{R}_+^2 : t' \leq t} e^{-t's} u(t') e^{-(t-t')s} v(t-t') dt' dt \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-t's} u(t') e^{-t''s} v(t'') dt'' dt = L(u)(s) L(v)(s). \end{aligned}$$

Deswegen folgt aus (1.3)

$$L(y) = L(x) L\left(t^{-\frac{1}{2}}\right).$$

Es ist ferner

$$L\left(t^{-\frac{1}{2}}\right)(s) = \int_0^\infty \frac{e^{-ts}}{\sqrt{t}} dt \stackrel{\sqrt{t}=\tau}{=} 2 \int_0^\infty e^{-s\tau^2} d\tau = 2\sqrt{\frac{\pi}{4s}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}.$$

Es folgt

$$L(x) = L(y) \sqrt{\frac{s}{\pi}} = \frac{s}{\pi} L(y) \sqrt{\frac{\pi}{s}} = \frac{s}{\pi} L(y) L\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = sL\left(\frac{1}{\pi} y * \frac{1}{\sqrt{t}}\right). \quad (1.6)$$

Ist $f' \in C[0, \infty)$ temperierte Funktion, so existiert für alle $s > 0$ die Laplacetransformierte $L(f')(s)$ und es gilt

$$sL(f) = L(f') + f(0).$$

Wir untersuchen die Funktion $f = \frac{y}{\pi} * \frac{1}{\sqrt{t}}$. Aus (1.3) folgt

$$\left(\frac{1}{\pi} y * \frac{1}{\sqrt{t}}\right)(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^p \left(\int_0^t \frac{x(s)}{\sqrt{t-s}} ds \right) \frac{dt}{\sqrt{p-t}} = \frac{1}{\pi} \int_0^p x(s) \int_s^p \frac{dt}{\sqrt{t-s}\sqrt{p-t}} ds.$$

Es ist

$$I(s, p) = \int_s^p \frac{dt}{\sqrt{t-s}\sqrt{p-t}} \stackrel{\tau = \frac{t-s}{p-s}}{=} \int_0^1 \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}\sqrt{1-\tau}} \stackrel{\tau = \sin^2 \varphi}{=} 2 \int_0^{\pi/2} d\varphi = \pi. \quad (1.7)$$

Daraus folgt

$$f(p) = \left(\frac{1}{\pi} y * \frac{1}{\sqrt{t}}\right)(p) = \frac{1}{\pi} \int_0^p x(s) ds = \int_0^p x(s) ds.$$

Daraus kann man schon x finden:

$$x = f' = \frac{1}{\pi} \left(y * \frac{1}{\sqrt{t}} \right)'$$

Explizit bedeutet das

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \frac{y(s)}{\sqrt{t-s}} ds \right).$$

Hat y beschränkte Variation auf $[0, \infty)$, so kann man die Antwort in Form eines Stiltjes-Integrals schreiben:

$$x(t) = \frac{1}{\pi} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \frac{y(t-s)}{\sqrt{s}} ds \right) = \boxed{\frac{y(0)}{\pi\sqrt{t}} + \frac{1}{\pi} \int_0^t \frac{dy(s)}{\sqrt{t-s}}}. \quad (1.8)$$

Analog kann man die Abelsche Gleichung der Form

$$y(t) = \int_t^\infty \frac{x(s)}{\sqrt{s-t}} ds \quad (1.9)$$

lösen. Es ist nämlich für $x \in \mathcal{S}(\mathbb{R}_+)$

$$\int_u^\infty \frac{y(t)}{\sqrt{t-u}} dt = \int_u^\infty \frac{1}{\sqrt{t-u}} \int_t^\infty \frac{x(s)}{\sqrt{s-t}} ds dt = \int_u^\infty x(s) \int_u^s \frac{dt}{\sqrt{(t-u)(s-t)}} ds = \pi \int_u^\infty x(s) ds,$$

siehe (1.7). Daraus folgt

$$x(u) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{du} \left(\int_u^\infty \frac{y(t)}{\sqrt{t-u}} dt \right).$$

Hat y beschränkte Variation auf $[0, \infty)$, so kann man die Antwort auch in diesem Fall in Form eines Stiltjes-Integrals schreiben:

$$x(t) = -\frac{1}{\pi} \frac{d}{du} \left(\int_0^\infty \frac{y(\tau+u)}{\sqrt{\tau}} dt \right) = -\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dy(\tau+u)}{\sqrt{\tau}} = \boxed{-\frac{1}{\pi} \int_u^\infty \frac{dy(t)}{\sqrt{t-u}}}. \quad (1.10)$$

1.2 Lösung des Abelschen problems

Vergleich mit der Lösungsformel (1.8) für Abelsche Integralgleichung (1.3) (in unserem Fall ist $s(0) = 0$) ergibt

$$s(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^y \frac{\tilde{T}(\tau)}{\sqrt{y-\tau}} d\tau = \frac{1}{\pi} \int_0^y \frac{\sqrt{\frac{g}{2}} T(mg\tau)}{\sqrt{y-\tau}} d\tau \stackrel{E=mg\tau}{=} \frac{1}{\pi\sqrt{2m}} \int_0^{mgy} \frac{T(E)}{\sqrt{mgy-E}} dE \quad (1.11)$$

Daraus findet man y als Funktion von s . Es folgt

$$\frac{dx}{ds} = \sqrt{1 - \left(\frac{dy}{ds} \right)^2},$$

bzw. die natürlich parametrisierte Kurve C :

$$x(s) = \int_0^s \sqrt{1 - (y'_s)^2} d\tau, \quad y = y(s).$$

1.3 Ein Sonderfall: Tautochrone

Das Tautochrone-Problem formuliert man wie folgt:

- Finde Kurve C , für die T von E unabhängig ist.

Die erste Lösung dieses Problems hat Chr.Huygens im Jahre 1673 in *Horologium oscillatorium* gegeben. Um das Problem zu lösen, setzen wir in (1.11) $T = const$ ein. Es ist dann

$$s(y) = \frac{T}{\pi\sqrt{2m}} \int_0^{mgy} \frac{dE}{\sqrt{mgy-E}} = \frac{T}{\pi\sqrt{2m}} 2\sqrt{mgy} = \frac{T}{\pi} \sqrt{2gy}.$$

Daraus folgt

$$y = \frac{\pi^2}{2gT^2} s^2 = \frac{s^2}{2a} \text{ bzw. } y'_s = \frac{\pi^2}{gT^2} s = \frac{s}{a}, \quad x'_s = \sqrt{1 - \frac{s^2}{a^2}}, \quad s \leq a = \frac{gT^2}{\pi^2}.$$

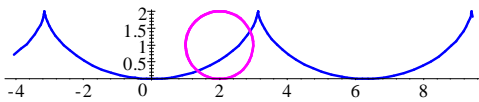
Das ergibt

$$\begin{aligned} x(s) &= \int_0^s \sqrt{1 - \frac{\tau^2}{a^2}} d\tau \stackrel{\tau = a \sin \varphi}{=} a \int_0^{\arcsin \frac{s}{a}} \cos^2 \varphi d\varphi = a \int_0^{\arcsin \frac{s}{a}} \left(\frac{1}{2} \cos(2\varphi) + \frac{1}{2} \right) d\varphi \\ &= a \left[\frac{1}{4} \sin \left(2 \arcsin \frac{s}{a} \right) + \frac{1}{2} \arcsin \frac{s}{a} \right]. \end{aligned}$$

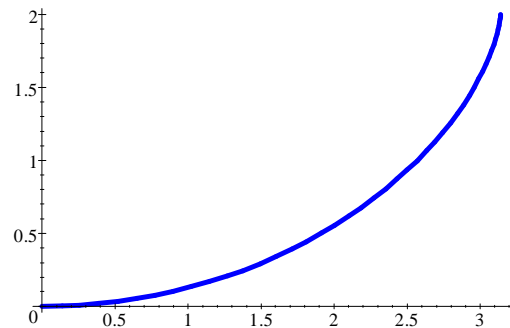
Mit $\theta = 2 \arcsin \frac{s}{a}$ hat man

$$\begin{aligned} x &= \frac{a}{4} [\sin \theta + \theta], \\ y &= \frac{a}{2} \left(\frac{s}{a} \right)^2 = \frac{a}{2} \sin^2 \frac{\theta}{2} = \frac{a}{4} [1 - \cos \theta]. \end{aligned}$$

Die gesuchte Kurve ist also Zykloide (genauer gesagt, der Abschnitt $\theta \in [0, \pi]$), also die Kurve, die ein Punkt auf dem Kreis durchläuft, wenn der Kreis auf einer Geraden abrollt.



Zykloide $x = \sin \theta + \theta, y = 1 - \sin \theta$



Zykloide: der Abschnitt $\theta \in [0, \pi]$

2 Gut und schlecht gestellte Probleme

2.1 Beispiel aus der Vorlesung

$K : C[0, 1] \rightarrow C^1[0, 1]$ wird gegeben durch

$$Kx(t) = \int_a^t x(s) ds$$

für ein festes $a \in [0, 1]$.

- Das Problem "Gegeben sei $y \in C^1[0, 1]$. Finde x mit $y = Kx$ " ist schlecht gestellt (unabhängig von Normen), da sich z.B. zu $y \equiv 1$ kein x findet.

Schritt 1: Der Raum $C^1[0, 1]$ wird durch

$$Y = \{y \in C^1[0, 1] : y(a) = 0\} \subset C[0, 1],$$

ersetzt. Nun ist das Problem

$$\boxed{\text{Gegeben sei } y \in Y. \text{ Finde } x \in X \text{ mit } y = Kx} \tag{IP}$$

für jedes y eindeutig lösbar: $x = y'$.

Der Raum $X = C[0, 1]$ ist ein Banachraum bezüglich der Norm

$$\|x\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |x(t)|. \tag{2.1}$$

Aufgabe 2.1 Ist X ein Hilbertraum bzgl. der Norm $\|\cdot\|_\infty$?

Lösung: Nein, weil für jede Norm, die von einem Skalarprodukt stammt

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

gilt

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{2.2}$$

(die sogenannte Parallelogrammgleichung). Die Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$ erfüllt die Parallelogrammgleichung nicht. So ist z.B. für $x(t) = t$, $y(t) = 1 - t$

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 1 + 1 \neq 2 + 2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

.....
 Der Raum Y ist bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ kein Banachraum, da Y nicht abgeschlossen ist. Das Problem (IP) ist nach wie vor schlecht gestellt, da die Lösung $x = y'$ nicht stetig von y abhängt. So ist z.B. zu y_n gegeben durch

$$y_n(t) = \frac{1}{n} \sin(n(t - a))$$

mit $\|y_n\|_\infty \rightarrow 0$ die Lösungsfolge

$$x_n(t) = \cos(n(t-a))$$

divergent.

Schritt 2: Die Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$ in Y wird durch

$$\|y\|_{C^1} = \|y'\|_\infty = \sup_{t \in [0,1]} |y'(t)|$$

ersetzt. Nun ist (IP) gut gestellt, da aus $y_n \rightarrow y$ in Y folgt

$$\|y_n - y\|_{C^1} = \|y'_n - y'\|_\infty = \|x_n - x\|_\infty \rightarrow 0.$$

Aufgabe 2.2 Welche der folgenden Halbnormen in $C^1[0,1]$ sind Normen³:

$$A) \|y\|_{(A)} = |y'(0)|, \quad B) \|y\|_{(B)} = |y(1)|, \quad C) \|y\|_{(C)} = \|y\|_\infty, \quad D) \|y\|_{(D)} = \|y'\|_\infty?$$

Die gleiche Frage für Y .

Aufgabe 2.3 Beweisen Sie:

a) Die Normen

$$\|y\|_{(1)} = \|y'\|_\infty + |y(1)| \quad \text{und} \quad \|y\|_{(2)} = \|y'\|_\infty + \|y\|_\infty$$

sind äquivalent in $C^1[0,1]$, d.h. es gibt Konstanten $c_1, c_2 > 0$ mit

$$c_1 \|y\|_{(1)} \leq \|y\|_{(2)} \leq c_2 \|y\|_{(1)}.$$

b) Bezüglich $\|\cdot\|_{(1)}$, sowie $\|\cdot\|_{(2)}$, ist $C^1[0,1]$ ein Banachraum.

Lösung zu a): Es ist $|y(1)| \leq \|y\|_\infty$, also ist $\|y\|_{(1)} \leq \|y\|_{(2)}$. Aus der Abschätzung

$$|y(t)| = \left| y(1) - \int_t^1 y'(s) ds \right| \leq |y(1)| + (1-t) \|y'\|_\infty \leq \|y'\|_\infty + |y(1)|$$

folgt

$$\|y\|_\infty \leq \|y\|_{(1)} \quad \text{bzw.} \quad \|y\|_{(2)} \leq 2 \|y\|_{(1)}.$$

³Der Unterschied ist, dass für die Norm das Axiom "Aus $\|x\| = 0$ folgt $x = 0$ " erfüllt.

2.2 Beispiel 2

$K : C[0, 1] \rightarrow C^2[0, 1]$ wird gegeben durch

$$Kx(u) = \int_u^1 \int_0^t x(s) ds dt. \quad (2.3)$$

- Das Problem "Gegeben sei $y \in C^2[0, 1]$. Finde x mit $y = Kx$ " ist schlecht gestellt (unabhängig von Normen), da sich z.B. zu $y \equiv 1$ kein x findet wegen $y(1) = 0$.

Schritt 1: Aus (2.3) folgt eine weitere Randbedingung:

$$y'(u) = - \int_0^u x(s) ds \text{ also } y'(0) = 0.$$

Deswegen muss man als erstes den Raum $C^2[0, 1]$ durch

$$Y = \{y \in C^2[0, 1] : y(1) = 0, y'(0) = 0\} \subset C[0, 1], \quad (2.4)$$

ersetzen. Nun ist das Problem (IP): "Gegeben sei $y \in Y$. Finde $x \in X$ mit $y = Kx$ " für jedes y eindeutig lösbar:

$$x = -y''.$$

- Man will noch eine passende Norm in Y finden, so dass Y zu Banachraum und der Operator $K : X = C[0, 1] \rightarrow Y$ zu Isomorphismus der Banachräumen wird.

Aufgabe 2.4 Welche der folgenden Halbnormen sind Normen in $C^2[0, 1]$:

A)-D) wie in Aufgabe 2.2,

$$E) \|y\|_{(E)} = \|y''\|_\infty, \quad F) \|y\|_{(F)} = \|y''\|_\infty + \|y\|_\infty$$

$$G) \|y\|_{(G)} = \|y''\|_\infty + |y(1)|, \quad H) \|y\|_{(H)} = \|y''\|_\infty + |y'(0)|,$$

$$I) \|y\|_{(I)} = \|y''\|_\infty + |y'(0)| + |y(1)|?$$

Die gleiche Frage für Y aus (2.4).

Hilfssatz 2.5 a) Sei y eine zweimal stetig differenzierbare Funktion auf einem Intervall $[\alpha, \beta]$ mit Länge $\delta = \beta - \alpha$. Dann gilt

$$\|y'\|_\infty \leq \frac{2\|y\|_\infty}{\delta} + \delta \|y''\|_\infty. \quad (2.5)$$

b) Sei y auf einem unendlichem Intervall (also auf $(-\infty, \infty)$, $(-\infty, a]$ oder $[a, \infty)$) zweimal stetig differenzierbar. Dann gilt

$$\|y'\|_\infty \leq 2\sqrt{2\|y\|_\infty \|y''\|_\infty}.$$

Beweis. a) Wir bezeichnen

$$a = \min_{\alpha \leq t \leq \beta} |f'(t)| = |f'(t_0)|.$$

Es gilt für jedes $t \in [\alpha, \beta]$

$$|f'(t)| = \left| f'(t_0) + \int_{t_0}^t f''(s) ds \right| \leq a + |t - t_0| \|y''\|_\infty \leq a + \delta \|y''\|_\infty. \quad (2.6)$$

Nun gilt aber die Ungleichung

$$\delta a \leq \left| \int_{\alpha}^{\beta} f'(s) ds \right| = |f(\beta) - f(\alpha)| \leq |f(\beta)| + |f(\alpha)| \leq 2 \|y\|_\infty,$$

woraus die Abschätzung

$$a \leq \frac{2 \|y\|_\infty}{\delta}$$

folgt. Diese Ungleichung zusammen mit (2.6) ergibt

$$|y'(t)| \leq \frac{2 \|y\|_\infty}{\delta} + \delta \|y''\|_\infty \quad (2.7)$$

für alle $t \in [\alpha, \beta]$, was zu (2.5) äquivalent ist. Die Koeffizienten $\frac{2}{\delta}$ und δ in (2.5) können i.a. nicht verbessert werden, da z.B. für $y(t) = t - \frac{\alpha+\beta}{2}$ gilt

$$\|y\|_\infty = \frac{\delta}{2}, \quad \|y'\|_\infty = 1, \quad \|y''\|_\infty = 0, \quad \text{also } \|y'\|_\infty = \frac{2 \|y\|_\infty}{\delta} + \delta \|y''\|_\infty.$$

b) Ist y auf einem unendlichem Intervall zweimal stetig differenzierbar, so kann man für die Abschätzung (2.7) zu jedem $\delta > 0$ ein Intervall $[\alpha, \beta]$ mit $|\beta - \alpha| = \delta$ wählen, das den Punkt t enthält. Wählen wir

$$\delta = \sqrt{\frac{2 \|y\|_\infty}{\|y''\|_\infty}},$$

so erhalten wir

$$|y'(t)| \leq \frac{2 \|y\|_\infty}{\sqrt{2 \|y\|_\infty}} \sqrt{\|y''\|_\infty} + \sqrt{\frac{2 \|y\|_\infty}{\|y''\|_\infty}} \|y''\|_\infty = 2 \sqrt{2 \|y\|_\infty \|y''\|_\infty}.$$

Aufgabe 2.6 *Beweisen Sie:*

- Die Normen $\|\cdot\|_{(F)}$ und $\|y\|_{(I)}$ sind äquivalent in $C^2[0, 1]$
- Bezüglich $\|\cdot\|_{(F)}$, sowie $\|\cdot\|_{(I)}$, ist $C^2[0, 1]$ ein Banachraum.

Es folgt aus Aufgabe 2.4, dass Y bzgl. der Norm $\|y\|_{(E)} = \|y''\|_\infty$ ein Banachraum ist. Da der Operator $K : X \rightarrow Y$ stetig (also beschränkt) und injektiv ist, besitzt er einen stetigen inversen $K^{-1}y = y''$. Das Problem (IP) ist nun gut gestellt.

2.3 Beispiel 3

Wir definieren $A : Y \rightarrow X$ mit

$$Y = \{y \in C^2[0, a] : y(0) = 0, y'(0) = 0\}, \quad \|y\|_Y = \|y''\|_\infty$$

$$X = C[0, a], \quad \|x\|_X = \|x\|_\infty$$

durch

$$Ay = y'' + y.$$

Es sind folgende Fragen zu beantworten:

1. Sind X und Y Banachräume?
2. Ist A beschränkt?
3. Ist A injektiv?
4. Falls **ja**, finde den inversen Operator $K = A^{-1} : X \rightarrow Y$?

1. Die erste Frage ist mit **ja** zu beantworten, wie im Beispiel 2.

2. Sei $y \in Y$. Dann ist

$$y'(t) = \int_0^t y''(s) ds \quad \text{bzw.} \quad y(l) = \int_0^l y'(t) dt,$$

also

$$y(l) = \int_{0 \leq s \leq t \leq l} y''(s) ds dt = \int_0^l \left(\int_s^l dt \right) y''(s) ds = \int_0^l (l-s) y''(s) ds.$$

Nun ist

$$\|y\|_\infty \leq a^2 \|y''\|_\infty.$$

Daraus folgt die Beschränktheit von A .

3. Injektivität bedeutet, dass die homogene Gleichung

$$y'' + y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0,$$

nur triviale Lösung $y \equiv 0$ hat. Die allgemeine Lösung zu $y'' + y = 0$ wird durch

$$y(t) = p \cos t + q \sin t$$

gegeben. Einsetzen von Anfangsbedingungen führt auf $p = q = 0$.

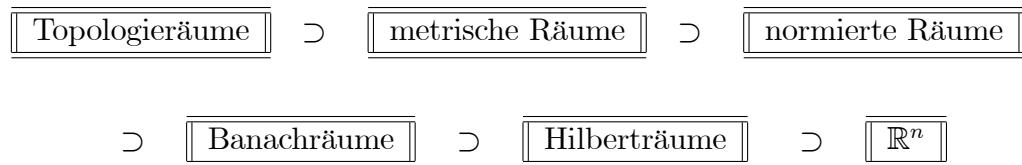
► Wie ändert sich die Antwort auf diese Frage, wenn man die Randbedingung $y'(0) = 0$ durch $y(a) = 0$ ersetzt?

4. Als letztes bemerken wir, dass der inverse Operator durch

$$\begin{aligned}y(t) &= Kx(t) = \int_0^t \sin(t-s) x(s) ds \\ &= \sin(t) \int_0^t \cos(s) x(s) ds - \cos(t) \int_0^t \sin(s) x(s) ds\end{aligned}$$

gegeben wird.

3 Kompakte Mengen und kompakte Operatoren



3.1 Kompakte und relativ kompakte topologische Räume

Definition 3.1 (Kompakter topologischer Raum) a) Ein topologischer Raum X heißt *kompakt* (= *Kompaktum*), wenn jede offene Überdeckung $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ von X eine endliche Teilüberdeckung $\bigcup_{j=1}^n U_{\alpha_j} \supset X$ besitzt.

b) Eine Teilmenge X eines topologischen Raums Y heißt *kompakt*, wenn jede offene Überdeckung von X eine endliche Teilüberdeckung besitzt (äquivalent: $X \subset Y$ ist genau dann kompakt, wenn X als topologischer Raum mit der Teilraumtopologie kompakt ist).

Aufgabe 3.2 Beweisen Sie:

- Eine abgeschlossene Teilmenge eines kompakten Raumes ist kompakt.
- Eine kompakte Teilmenge eines Hausdorff-Raumes ist abgeschlossen.

Lemma 3.3 Das Bild einer kompakten Menge unter einer stetigen Funktion ist kompakt.

Beweis: Sei $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ stetig. Ferner sei $\bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha \supset f(X)$ eine offene Überdeckung vom Bilde. Dann ist $\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$ mit $U_\alpha = f^{-1}(V_\alpha)$ eine offene Überdeckung von X . Sie besitzt eine endliche Teilüberdeckung, $\bigcup_{j=1}^n U_{\alpha_j}$, so dass $\bigcup_{j=1}^n V_{\alpha_j}$ eine endliche Teilüberdeckung von $f(X)$ ist. \square

Aufgabe 3.4 Zeigen Sie: Eine stetige Funktion nimmt auf einem Kompaktum ein globales Minimum und ein globales Maximum an.

Hilfssatz 3.5 (Satz von Heine) Eine stetige Funktion auf einem kompakten metrischen Raum ist gleichmäßig stetig.

Definition 3.6 Eine Teilmenge X eines topologischen Raums Y heißt **relativ kompakt**, wenn der Abschluß \bar{X} kompakt ist.

3.2 Sequenziell kompakte (Folgenkompakte) Mengen

Definition 3.7 (Folgenkompakter topologischer Raum) Ein topologischer Raum X (bzw. eine Teilmenge $X \subset Y$) heißt *folgenkompakt*, wenn jede Folge (x_n) , $n = 1, \dots$, eine gegen ein $x \in X$ konvergente Teilfolge hat (äquivalent: jede Folge hat einen Häufungspunkt in X).

Hilfssatz 3.8 (Satz von Bolzano-Weierstraß) Kompakter topologischer Raum ist folgenkompakt.

Beweis: Sei (x_n) , $n = 1, \dots$, eine Folge, die keinen Häufungspunkt hat. Dann gibt für jedes $x \in X$ eine offene Umgebung $U(x)$, die nur endlich viele Punkte der Folge enthält. Aus der Überdeckung $\cup_{x \in X} U(x) \supset X$ kann man eine endliche Teilüberdeckung $\cup_{j=1}^n U(x_j) \supset X$ wählen, die dann wiederum nur endlich viele Punkte der Folge enthält. Das ergibt den Widerspruch, da die Folge unendlich ist. \square

Hilfssatz 3.9 *Folgenkompakter metrischer Raum ist kompakt.*

Für metrische Räume bedeutet **kompakt** und **folgenkompakt** dasselbe.

3.3 Präkompakte (total beschränkte) metrische Räume

Definition 3.10 *Eine Teilmenge D eines metrischen Raumes M heißt **präkompakt**, oder **total beschränkt**, wenn D zu jedem $\varepsilon > 0$ ein endliches Epsilon-Netz besitzt, d.h. eine Menge von Punkten x_1, \dots, x_n mit*

$$D \subset \bigcup_{i=1}^n \{x \in M : d(x, x_i) < \varepsilon\} = \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i).$$

Lemma 3.11 *Ein relativ kompakter metrischer Raum ist präkompakt.*

Beweis: Man wähle eine endliche Teilüberdeckung aus der Überdeckung $\cup_{x \in X} B_\varepsilon(x)$. \square

Satz 3.12 (Das Hausdorffsche Kriterium) *Sei X ein vollständiger metrischer Raum. Dann ist jede präkompakte Teilmenge $M \subset X$ relativ kompakt.*

Beweisskizze: Sei (x_n) , $n = 1, 2, \dots$, eine unendliche Folge in M . Man wähle ein ε -Netz für M mit $\varepsilon = 1$. In einem Ball B_1 gibt es unendlich viele Folgeelemente. B_1 besitzt ein ε -Netz mit $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Wiederum enthält ein Ball $B_{1/2}$ unendlich viele Folgeelemente. Man konstruiere so weiter eine Schachtelung $B_1, B_{1/2}, \dots, B_{2^{-n}}, \dots$, für die gilt: jeder Ball enthält unendlich viele von x_n . Ferner wähle man eine Teilfolge (x_{i_k}) mit $x_{i_k} \in B_{2^{-k}}$, $k = 1, 2, \dots$. Dies ist eine Cauchyfolge, daher konvergent in X . Daraus folgt: \overline{M} ist folgenkompakt, also kompakt. \square

Aufgabe 3.13 *Ein metrischer Raum ist genau dann kompakt, wenn er vollständig und präkompakt ist.*

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 3.2, Lemma 3.11 und das Hausdorffsche Kriterium.

Aufgabe 3.14 (Satz von Heine-Borel) *Eine Teilmenge $M \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann kompakt, wenn M abgeschlossen und beschränkt ist.*

Ist der Raum unendlichdimensional, so gilt dieses Kriterium nicht.

Lemma 3.15 *Sei X ein unendlichdimensionaler normierter Raum. Dann ist die Einheitskugel B_1 nicht kompakt.*

Beweis: Angenommen, die Kugel $B_1(0)$ besitzt ein endliches ε -Netz für ein $\varepsilon < 1$:

$$B_1(0) \subset \bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(x_i).$$

Wir betrachten einen N -dimensionalen Raum $\Pi_N \subset X$, $N \geq n$, der alle Punkte x_i , $i = 1, \dots, n$, enthält. Das ε -Netz in X induziert ein ε -Netz $\bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon^\Pi(x_i)$ in Π mit $B_\varepsilon^\Pi(x_i) = \Pi \cap B_\varepsilon(x_i)$, das die Einheitskugel $B_1^\Pi = \Pi \cap B_1(0)$ von Π enthält. Wir bezeichnen mit σ_N das Volumen der Einheitskugel in \mathbb{R}^N . Dann gilt

$$\sigma_N = \text{Vol } B_1^\Pi < \sum_{i=1}^n \text{Vol } B_\varepsilon^\Pi(x_i) = n\sigma_N\varepsilon^N.$$

Das impliziert die Ungleichung $\varepsilon^N < 1/n$, was für großes N unmöglich ist. \square

Satz 3.16 (Satz von Arzela-Ascoli) Sei X ein kompakter normierter Raum. Wir bezeichnen mit $C(X)$ den Raum aller reelwertigen stetigen Funktionen auf X mit der Maximumnorm $\|f\| = \max_{x \in X} |f(x)|$. Dann ist eine Teilmenge $M \subset C(X)$ genau dann relativ kompakt, wenn sie gleichmäßig beschränkt und gleichgradig stetig ist.

3.4 Kompakte lineare Operatoren

Definition 3.17 Seien X und Y normierte Räume. Ein linearer Operator $A : X \rightarrow Y$ heißt **kompakt**, wenn das Bild jeder beschränkten Teilmenge $M \subset X$ relativ kompakt in Y ist.

Aufgabe 3.18 Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes offenes Gebiet. Beweisen Sie, dass die Einbettung $C^{k+1}(\overline{\Omega}) \hookrightarrow C^k(\overline{\Omega})$, $k \geq 0$, ein kompakter Operator ist.

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Arzela-Ascoli.

Hilfssatz 3.19 Kompakter linearer Operator ist beschränkt, also stetig.

Beweis: Das Bild der Einheitskugel ist kompakt, daher Beschränkt. \square

Hilfssatz 3.20 Sei X ein normierter und Y ein Banachraum. Ferner seien $K_j : X \rightarrow Y$, $j = 1, 2, \dots$, kompakt. Konvergiert die Folge (K_j) gegen ein $K : X \rightarrow Y$, d.h. $\lim_{j \rightarrow \infty} \|K_j - K\| = 0$, so ist auch K kompakt.

Beweis: Es reicht aus zu zeigen, dass das Bild $K(B)$ der Einheitskugel $B = B_1(0)$ präkompakt ist. Zu einem $\varepsilon > 0$ wähle man ein K_j mit $\|K_j - K\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Das Bild $K_j(B)$ hat ein $\frac{\varepsilon}{2}$ -Netz. Dieses Netz ist aber das ε -Netz für $K(B)$. \square

Hilfssatz 3.21 Seien X, Y, Z normierte Räume und W ein Banachraum. Ferner seien $P : X \rightarrow Y$, $K : Y \rightarrow Z$ und $Q : Z \rightarrow W$ stetige lineare Operatoren, wobei K kompakt ist. Dann ist $R = BKA : X \rightarrow W$ kompakt.

Beweis: Sei $M_X \subset X$ beschränkt. Dann ist $M_Y = P(M_X) \subset Y$ beschränkt und entsprechend $M_Z = K(M_Y) \subset Z$ relativ kompakt. Zu beweisen ist, dass das Bild $M_W = Q(M_Z) = R(M_X)$ auch relativ kompakt ist, was im Banachraum zu präkompakt äquivalent ist. Man wähle ein $\varepsilon > 0$. Die relativ kompakte (und folglich auch präkompakte) Menge M_Z hat ein ε' -Netz mit $\varepsilon' = \varepsilon \|Q\|^{-1}$:

$$M_Z \subset \bigcup_{i=1}^n B_{\varepsilon'}(z_j).$$

Dann ist

$$M_W = Q(M_Z) \subset \bigcup_{i=1}^n Q[B_{\varepsilon'}(z_j)].$$

Andererseits gilt

$$Q[B_{\varepsilon'}(z_j)] \subset B_\varepsilon(Q(z_j)).$$

Daraus folgt, dass

$$\bigcup_{i=1}^n B_\varepsilon(w_j) \text{ mit } w_j = Q(z_j)$$

ein ε -Netz für $R(M_X)$ ist. □

Satz 3.22 *Seien X, Y Hilberträume. Dann ist $K : X \rightarrow Y$ genau dann kompakt, wenn es eine Folge $K_j : X \rightarrow Y$ der Operatoren endlichen Ranges gibt, die gegen K bzgl. der Operatornorm konvergiert.*

4 Worst case error

Definition 4.1 Seien X und Y Banachräume, $K : X \rightarrow Y$ ein linearer beschränkter Operator, $X_1 \subset X$ ein Unterraum und $\|\cdot\|_1$ eine Norm auf X_1 , die

$$\|x\| \leq c \|x\|_1 \text{ für alle } x \in X_1$$

erfüllt mit einem $c > 0$. Für festes $\delta > 0$ und $E > 0$ nennen wir die obere Schranke

$$\mathcal{F}(\delta, E, \|\cdot\|_1) = \sup \{ \|x\| : x \in X_1, \|Kx\| \leq \delta, \|x\|_1 \leq E \}$$

worst case error für den Fehler δ unter der a priori Information $\|x\|_1 \leq E$.

4.1 Wärmeleitung als glätternder Prozess

Das direkte Wärmeleitungsproblem: Gegeben sei die Anfangstemperaturverteilung

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < \pi. \quad (4.1)$$

Zu finden ist die Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0 \quad (4.2)$$

unter der Randbedingung

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \quad t > 0.$$

Das inverse Problem (Wärmeleitung rückwärts): Gegeben sei

$$u_T(x) = u(x, T), \quad 0 < x < \pi,$$

für ein $T > 0$. Zu finden ist $u(x, \tau)$ für ein $\tau \in (0, T)$.

Sowohl das direkte als auch das inverse Problem kann man mithilfe der Fourierreihe explizit lösen. Seien

$$a_n = a_{0,n} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u_0(y) \sin(ny) dy \quad (4.3)$$

die Fourierkoeffizienten der Anfangsverteilung. Dann sind

$$a_{t,n} = a_n e^{-n^2 t}, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (4.4)$$

die entsprechenden Fourierkoeffizienten von u_t :

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n^2 t} \sin(nx) \quad (4.5)$$

gegeben. Man kann also die Transformation

$$K_0^T : L^2(0, \pi) \rightarrow L^2(0, \pi) \text{ gegeben durch } K_0^T u_0 = u_T = u(\cdot, T)$$

als Integraloperator

$$u(x, T) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} k_0^T(x, y) u_0(y) dy, \quad 0 < x < \pi,$$

mit dem Kern

$$k_0^T(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 T} \sin(nx) \sin(ny) \quad (4.6)$$

erfassen. Analog ist

$$u_{t_2} = K_{t_1}^{t_2} u_{t_1}, \quad 0 \leq t_1 \leq t_2,$$

oder

$$u(x, t_2) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} k_{t_1}^{t_2}(x, y) u(y, t_1) dy, \quad 0 < x < \pi,$$

mit

$$k_{t_1}^{t_2}(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2(t_2-t_1)} \sin(nx) \sin(ny) \quad (4.7)$$

Die Reihe (4.7), $t_2 > t_1$, konvergiert absolut gegen eine stetige Funktion, daher ist der Operator $K_{t_1}^{t_2} : L^2(0, \pi) \rightarrow L^2(0, \pi)$ kompakt. Außerdem sieht man aus (4.4), dass die Fourierkoeffizienten von u_t , $t > 0$, schnell fallend sind.

Aufgabe 4.2 Sei $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, eine komplexwertige Folge mit

$$\limsup (|n^{k+2} c_n|) < \infty \quad (4.8)$$

für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad (4.9)$$

gegen eine 2π -periodische stetige Funktion f , für die gilt $f \in C^k(\mathbb{R})$ und

$$\frac{d^m f(x)}{dx^m} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (in)^m e^{inx}, \quad x \in \mathbb{R},$$

für alle natürliche $m \leq k$.

Lösung: Die Reihe (4.9) hat eine natürliche Majorante

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} |c_n e^{inx}| \leq |c_0| + c \sum_{n=N_1, n \neq 0}^{N_2} \frac{1}{|n|^{k+2}} < \infty,$$

deswegen konvergiert sie gegen eine stetige Funktion. Ebenso hat die Reihe aus den Ableitungen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \frac{d^m}{dx^m} (e^{inx}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (in)^m e^{inx}$$

die Majorante

$$\sum_{n=N_1}^{N_2} |c_n (in)^m e^{inx}| \leq c \sum_{n=N_1, n \neq 0}^{N_2} \frac{1}{|n|^{k-m+2}} < \infty \text{ für } 1 \leq m \leq k \text{ .qed}$$

Mit blick auf (4.7) schließen wir: Jeder Operator $K_{t_1}^{t_2} : L^2(0, \pi) \rightarrow L^2(0, \pi)$ mit $t_2 > t_1$ ist glättend, d.h. der Wertebereich besteht aus glatter Funktionen. Tatsächlich, seien $(a_{t_1, n})_{n \in \mathbb{N}}$, die Fourierkoeffizienten von u_{t_1} :

$$a_{t_1, n} = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(y, t_1) \sin(ny) dy.$$

Dann sind

$$a_{t_2, n} = a_{t_1, n} e^{-n^2(t_2-t_1)}$$

die Fourierkoeffizienten von u_{t_2} . Aus $u_{t_1} \in L^2(0, \pi)$ folgt $\sum_{n=1}^\infty |a_{t_1, n}|^2 < \infty$, also auch $a_{t_1, n} \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$. Da die Exponentialfunktion $e^{-n^2(t_2-t_1)}$ bei festem $t_2 - t_1 > 0$ schneller abfällt, als jedes Polynom in n wächst, hat man

$$\limsup |a_{t_2, n} n^{k+2}| < \infty \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Es ist also $u_{t_2} \in C^\infty[0, \pi]$.

4.2 Worst case error für die Wärmeleitung

Sei $T > 0$ gegeben. Wir wollen die Temperaturverteilung u_τ für ein τ zwischen 0 und T aus u_T rekonstruieren. Der Operator $K_\tau^T : L^2(0, \pi) \rightarrow L^2(0, \pi)$ ist, wie wir schon wissen, kompakt mit $\mathcal{R}(K_\tau^T) \subset C^\infty[0, \pi]$. Deswegen ist der inverse Operator $(K_\tau^T)^{-1} : \mathcal{R}(K_\tau^T) \rightarrow L^2(0, \pi)$ bezüglich der L^2 -Norm nicht beschränkt. Wir betrachten die folgende exakte Kette von Räumen und Operatoren

$$\{0\} \hookrightarrow \underbrace{L^2(0, \pi)}_{X_0} \xrightarrow{K_0^T} \underbrace{\mathcal{R}(K_0^T)}_{X_1} \xrightarrow{\text{Einbettung}} \underbrace{L^2(0, \pi)}_X \xrightarrow{K_\tau^T} \underbrace{L^2(0, \pi)}_Y.$$

In anderen Worten, X_1 besteht aus Funktionen

$$u_\tau(x) = \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-n^2\tau} \sin(nx) \text{ mit } (a_n) \in \ell^2, \text{ d.h. } \sum_{n=1}^\infty |a_n|^2 < \infty.$$

Die Norm auf X_1 wird durch

$$\|u_\tau\|_1 = \|u_0\|_{L^2(0, \pi)} = \left\| \sum_{n=1}^\infty a_n \sin(nx) \right\|_{L^2(0, \pi)} = \left(\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^\infty |a_n|^2 \right)^{1/2}$$

gegeben. Es ist ferner

$$\|K_\tau^T u_\tau\|_Y^2 = \left\| \sum_{n=1}^\infty a_n e^{-n^2T} \sin(nx) \right\|_{L^2(0, \pi)}^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^\infty |a_n|^2 e^{-2n^2T}.$$

Nach der Definition ist

$$\mathcal{F}(\delta, E, \|\cdot\|_1) = \sup \left\{ \|u_\tau\|_{L^2(0,\pi)} : \|u_T\|_{L^2(0,\pi)} \leq \delta, \|u_0\|_{L^2(0,\pi)} \leq E \right\}.$$

Äquivalent:

$$\mathcal{F}^2(\delta, E, \|\cdot\|_1) = \sup \left\{ \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 e^{-2n^2\tau} : \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 e^{-2n^2T} \leq \delta^2, \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2 \leq E^2 \right\}.$$

Mit der Bezeichnung

$$x_n = \left(\frac{\pi}{2} |a_n|^2\right)^{1/p}, \quad y_n = \left(\frac{\pi}{2} |a_n|^2 e^{-2n^2T}\right)^{1/q}, \quad \tau = \frac{T}{q}, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

hat man

$$\mathcal{F}^2(\delta, E, \|\cdot\|_1) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n : \sum_{n=1}^{\infty} x_n^p \leq E^2, \sum_{n=1}^{\infty} y_n^q \leq \delta^2, x_n \geq 0, y_n \geq 0 \right\} \quad (4.10)$$

mit $q = \frac{T}{\tau}$, $p = \frac{T}{T-\tau}$.

Lemma 4.3 (Höldersche Ungleichung) Seien $p, q > 0$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Für nichtnegative Folgen $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, gilt dann

$$\sum_{n=1}^N x_n y_n \leq \|x\|_p \|y\|_q \quad \text{für alle } N \in \mathbb{N}, \quad (4.11)$$

wobei $\|\cdot\|_p$ bzw. $\|\cdot\|_q$ die Hölder-Normen

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^N x_n^p \right)^{1/p} \quad \text{bzw.} \quad \|y\|_q = \left(\sum_{n=1}^N y_n^q \right)^{1/q}$$

bezeichnet. Die Ungleichung wird zu Gleichung für Folgen mit $x_n^p = \lambda y_n^q$ (falls y_n nicht identisch 0) mit dem gleichen λ für alle $n \leq N$.

Beweis: Für festes N betrachten wir die normierten Hilfsfolgen (X_n) , (Y_n) , $1 \leq n \leq N$, mit

$$X_n = \frac{x_n}{\|x\|_p} \quad \text{bzw.} \quad Y_n = \frac{y_n}{\|y\|_q}.$$

Es gilt dann $\sum_{n=1}^N X_n^p = 1$ und $\sum_{n=1}^N Y_n^q = 1$. Ferner gilt für alle $X, Y > 0$

$$XY \leq \frac{X^p}{p} + \frac{Y^q}{q}, \quad (4.12)$$

wobei die Gleichheit im Falle $X^p = Y^q$ erreicht wird. Das folgt aus der Young-Ungleichung:

Aufgabe 4.4 (Young-Ungleichung) Sei $f \in C[0, c]$ eine monoton steigende stetige Funktion auf dem Intervall $[0, c]$ mit $f(0) = 0$. Wir bezeichnen mit $\varphi \in C[0, f(c)]$ die inverse Funktion zu f . Dann gilt für jedes $a \in [0, c]$ und jedes $b \in [0, f(c)]$ die Ungleichung

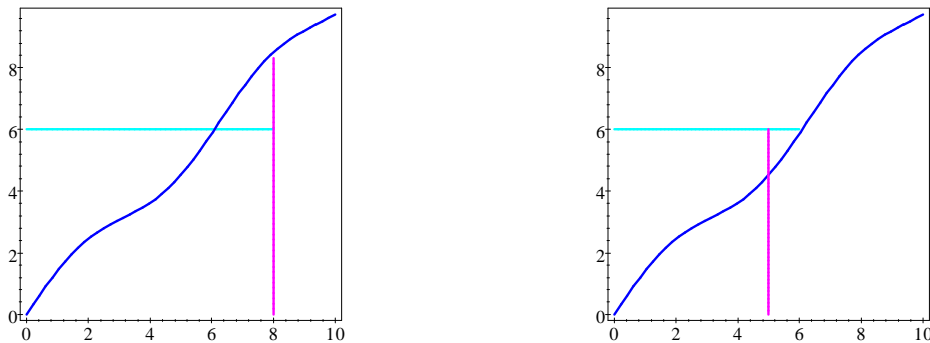
$$ab \leq \int_0^a f(t) dt + \int_0^b \varphi(\tau) d\tau. \tag{4.13}$$

Gleichheit tritt nur bei $b = f(a)$ auf.

Insbesondere gilt

$$ab \leq af(a) + b\varphi(b). \tag{4.14}$$

Lösung: Sei erst einmal $b \geq f(a)$. Dann ist $\int_0^a f(t) dt$ der Inhalt der Fläche unter dem Graphen von f im Intervall $[0, a]$. Entsprechend ist $\int_0^b \varphi(\tau) d\tau$ der Inhalt der Fläche über dem Graphen von f im Intervall $[0, \varphi(b)]$. Nun haben wir $\varphi(b) = f^{-1}(b) \geq a$. Die Vereinigung von diesen beiden Flächen enthält also das Rechteck mit den Seiten a und b .



Der Fall $b \leq f(a)$ kann analog betrachtet werden.

Die Ungleichung (4.14) ist offensichtlich. \square

Für $f(x) = x^{p-1}$ bzw. $\varphi(y) = y^{q-1}$ erhält man (4.12). Aus (4.12) folgt

$$\sum_{n=1}^N X_n Y_n \leq \frac{1}{p} \sum_{n=1}^N X_n^p + \frac{1}{q} \sum_{n=1}^N Y_n^q = \frac{1}{p} \cdot 1 + \frac{1}{q} \cdot 1 = 1.$$

Angewandt auf $(x_n), (y_n)$ führt das auf

$$1 \geq \sum_{n=1}^N \frac{x_n}{\|x\|_p} \frac{y_n}{\|y\|_q} = \frac{1}{\|x\|_p \|y\|_q} \sum_{n=1}^N x_n y_n,$$

was zu (4.11) äquivalent ist. \square

Aus (4.10) folgt nun mit Hilfe der Hölderschen Ungleichung mit $q = \frac{T}{\tau}, p = \frac{T}{T-\tau}$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^2(\delta, E, \|\cdot\|_1) &= \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n : \|x\|_p \leq E^{\frac{2}{p}}, \|y\|_q \leq \delta^{\frac{2}{q}}, x_n \geq 0, y_n \geq 0 \right\} \\ &= \delta^{\frac{2}{q}} E^{\frac{2}{p}} = \delta^{2\frac{\tau}{T}} E^{2(1-\frac{\tau}{T})}. \end{aligned}$$

Also ist

$$\mathcal{F}(\delta, E, \|\cdot\|_1) = \delta^{\frac{\tau}{T}} E^{1-\frac{\tau}{T}}.$$

5 Spektralsatz für kompakte selbstadjungierte Faltungoperatoren

5.1 Der Hilbertraum $L^2(0, 2\pi)$

Wir bezeichnen mit X den Hilbertraum $L^2(0, 2\pi)$. Die Funktionen

$$e_n(t) = \exp(int), \quad n \in \mathbb{Z},$$

bilden orthogonale Basis von X . Es gilt

$$\langle e_n, e_m \rangle = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)t} dt = \begin{cases} 2\pi, & n = m, \\ 0, & n \neq m. \end{cases}$$

Jede Funktion $f \in X$ kann als L^2 -konvergente Fourierreihe

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n e^{int} \quad \text{mit} \quad c_n(f) = \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt \quad (5.1)$$

dargestellt werden. Dabei gilt

$$\|f\|_{L^2} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty.$$

5.2 Eigenvektoren eines allgemeinen Faltungsoperators.

Sei Faltungsoperator $K : X \rightarrow X$ durch

$$Kf(s) = \int_0^{2\pi} k(s-t) f(t) dt, \quad f \in L^2(0, 2\pi). \quad (5.2)$$

gegeben mit einem 2π -periodischen Kern $k \in L^2(\mathbb{R})$. Es ist

$$|Kf(s)| \leq \|k\|_{L^2(0, 2\pi)} \|f\|_{L^2(0, 2\pi)},$$

also K beschränkt. Ferner gilt

$$\begin{aligned} Ke_n(s) &= \int_0^{2\pi} k(s-t) e^{int} dt = e^{ins} \int_0^{2\pi} k(s-t) e^{in(t-s)} dt \\ &\stackrel{\tau=s-t}{=} e_n(s) \int_0^{2\pi} k(\tau) e^{-in\tau} d\tau = c_n(k) e_n(s). \end{aligned}$$

Somit ist gezeigt, dass e_n ein Eigenvektor von K ist mit dazugehörigen Eigenwert

$$\lambda_n = c_n(k), \quad (5.3)$$

siehe (5.1). Da die Funktionen $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ Basis von $L^2(0, 2\pi)$ bilden, haben wir somit die vollständige Spektralzerlegung von K gefunden.

Ist K selbstadjungiert, so sind die Eigenwerte λ_n stets reell.

Aufgabe 5.1 Zeigen Sie: ein Faltungsoperator K , gegeben durch (5.2) ist genau dann selbstadjungiert, wenn

$$k(-l) = \overline{k(l)}$$

ist für alle l .

Lösung: K selbstadjungiert heißt $\langle Kf, g \rangle = \langle f, Kg \rangle$ für alle $f, g \in L^2(0, 2\pi)$, oder ausgeschrieben

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} k(s-t) f(t) \overline{g(s)} dt ds = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) \overline{k(t-s) g(s)} ds dt.$$

Daraus folgt die Behauptung. □

Für einen kompakten Operator gilt zusätzlich

$$\lambda_n \rightarrow 0 \text{ für } n \rightarrow \pm\infty.$$

5.3 Einfachschichtpotential auf dem Kreis.

Wir konstruieren einen kompakten Faltungsoperator für mit dem Eigenwert $\lambda_n = 1/|n|$ für $n \neq 0$ und $\lambda_0 = 0$. Aus (5.3) und (5.1) folgt dann

$$k = \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{1}{|n|} e_n, \tag{5.4}$$

wobei die Reihe im L^2 -Sinne konvergiert. Man kann (5.4) wie folgt umformen:

$$\begin{aligned} k(t) &= \frac{1}{2\pi} \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \frac{1}{|n|} e^{int} = \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{int}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-int}}{n} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{it})^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{-it})^n}{n} \right) \stackrel{z=e^{it}}{=} \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} + \overline{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}} \right). \end{aligned}$$

Aufgabe 5.2 Beweisen Sie, dass

$$\tilde{k}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n} \tag{5.5}$$

die Taylorreihe $T_0[F]$ der Funktion $F(z) = -\ln(1-z)$ ist um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$.

Lösung: Es ist

$$\frac{dF}{dz} = \frac{1}{1-z}, \quad \frac{d^2F}{dz^2} = \frac{1}{(1-z)^2}, \quad \frac{d^3F}{dz^3} = \frac{2}{(1-z)^3}, \dots, \quad \frac{d^m F}{dz^m} = \frac{(m-1)!}{(1-z)^m},$$

bzw.

$$F(0) = 0, \quad F'(0) = 1, \quad F''(0) = 1, \quad F'''(0) = 2, \dots, F^{(m)}(0) = (m-1)!,$$

was die Taylorreihe

$$T_0[F](z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{F^{(m)}(0)}{m!} z^m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{m!} z^m = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{z^m}{m}$$

ergibt. □

Die Potenzenreihe (5.5) hat den Konvergenzradius 1, so dass die Punkte $z = e^{it}$, die uns eigentlich interessieren, auf dem Rand des Konvergenzkreises liegen. Innerhalb des Kreises konvergiert die Reihe absolut, so dass für jedes $\rho < 1$ die Funktion

$$k_\rho(t) = \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\rho e^{it})^n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\rho e^{-it})^n}{n} \right)$$

stetig auf $[0, 2\pi]$ ist. Es gilt nach der obigen Aufgabe

$$\begin{aligned} k_\rho(t) &= \frac{1}{2\pi} (-\ln(1 - \rho e^{it}) - \ln(1 - \rho e^{-it})) = -\frac{1}{2\pi} \ln[(1 - \rho e^{it})(1 - \rho e^{-it})] \\ &= -\frac{1}{2\pi} \ln(2 - \rho(e^{it} + e^{-it})) = -\frac{1}{2\pi} \ln(2 - 2\rho \cos t) \\ &= -\frac{1}{2\pi} \ln\left(2 - 2\rho \left(1 - 2\sin^2 \frac{t}{2}\right)\right) = -\frac{1}{2\pi} \ln\left(2(1 - \rho) + 4\sin^2 \frac{t}{2}\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 5.3 *Beweisen Sie: Die Folge $(k_\rho)_{0 < \rho < 1}$ konvergiert für $\rho \rightarrow 1$ gegen $k \in L^2(0, 2\pi)$ gegeben durch*

$$k(t) = -\frac{1}{2\pi} \ln\left(4\sin^2 \frac{t}{2}\right).$$

Lösung: Wir schätzen die Differenz

$$D(\rho) = D(\rho)(t) = \ln\left(2(1 - \rho) + 4\sin^2 \frac{t}{2}\right) - \ln\left(4\sin^2 \frac{t}{2}\right) = \ln \frac{(1 - \rho) + 2\sin^2 \frac{t}{2}}{2\sin^2 \frac{t}{2}}$$

ab. Wir betrachten nur das Grundintervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, da die Integrale $\int |D(\delta)(t)|^2 dt$ auf jeder Achtelperiode gleich sind. Für $t \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ist

$$\frac{(1 - \rho) + 2\sin^2 \frac{t}{2}}{2\sin^2 \frac{t}{2}} \leq \frac{4(1 - \rho) + t^2}{t^2} \text{ wegen } 2\sin^2 \frac{t}{2} \geq \frac{t^2}{4}.$$

Wir bezeichnen $\delta = 4(1 - \rho)$. Wir wählen ein $\beta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$. Es gilt

$$\frac{\delta + t^2}{t^2} \leq \begin{cases} 2t^{-2}, & t \leq \delta^\beta, \\ 1 + \delta^{1-2\beta}, & t > \delta^\beta. \end{cases}$$

Das ergibt

$$D(\rho) \leq \begin{cases} \ln \frac{2}{t^2}, & t \leq \delta^\beta, \\ \delta^{1-2\beta}, & t > \delta^\beta. \end{cases}$$

Für jedes $\alpha > 0$ und $x \geq 1$ gilt

$$\ln x \leq \frac{1}{\alpha e} x^\alpha$$

(dies ist in der Tat zu der nahezu offensichtlichen Ungleichung $y \leq e^{y-1}$, wenn man $y = \alpha \ln x$ einsetzt). Das ergibt für die L^2 -Norm die Abschätzung (angenommen $\alpha < \frac{1}{4}$)

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \|k_\rho - k\|_{L^2(0,2\pi)}^2 &\leq \int_0^{\delta^\beta} \left(\frac{2^\alpha}{\alpha e t^{2\alpha}} \right)^2 dt + \int_{\delta^\beta}^{\pi/2} (\delta^{1-2\beta})^2 dt \leq c_1 t^{1-4\alpha} \Big|_0^{\delta^\beta} + \delta^{2-4\beta} \int_0^{\pi/2} dt \\ &= c_1(\alpha, \beta) \delta^{\beta(1-4\alpha)} + c_2(\alpha, \beta) \delta^{2-4\beta}. \end{aligned}$$

Für passende α und β , z.B.

$$\beta = \frac{2}{5}, \quad \alpha \ll 1,$$

bekommt man Konvergenz von Ordnung $\approx \frac{1}{5} - \varepsilon$, d.h.

$$\|k_\rho - k\|_{L^2(0,2\pi)} \leq c(\varepsilon) (1 - \rho)^{\frac{1}{5} - \varepsilon}.$$

Lemma 5.4 Sei $(f_m)_{m \geq 1}$ eine Folge in $L^2(0, 2\pi)$, die gegen f konvergiert. Dann gilt für jedes n

$$c_n(f_m) \rightarrow c_n(f) \quad \text{für } m \rightarrow \infty.$$

Der **Beweis** folgt aus der einfachen Überlegung, dass Fourierkoeffizienten stetige lineare Funktionale auf $L^2(0, 2\pi)$ sind. □

Korollar 5.5 Der kompakte selbstadjungierte Operator K gegeben durch

$$Kf(s) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \ln \left(2 \left| \sin \frac{s-t}{2} \right| \right) f(t) dt$$

hat Eigenvektoren e_n und Eigenwerte $\lambda_n = 1/|n|$, $n \in \mathbb{Z}$.

Der Operator $K : L^2(0, 2\pi) \rightarrow L^2(0, 2\pi)$ heißt **Einfachschichtpotential** für den Einheitskreis und wird gewöhnlicherweise in der Form

$$Kf(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{|y|=1} \ln |x - y| f(y) ds(y)$$

geschrieben. Hier sind $x = (\cos s, \sin s)$, $y = (\cos t, \sin t)$ Punkte auf dem Einheitskreis in der Ebene, ds bedeutet Längenelement.

6 Fouriertransformation

6.1 Schwartzraum

Definition 6.1 a) Sei $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine glatte komplexwertige Funktion. Für jedes $m \in \mathbb{N}$ und jedes $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die Halbnorm $p_{m,n}$ durch

$$p_{m,n}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}} (|x| + 1)^m \left| \frac{d^n \varphi(x)}{dx^n} \right|.$$

Die Norm $p_{m,0}$ (die $n = 0$ entspricht) bezeichnen wir mit p_m .

b) Der **Schwartzraum** $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ besteht aus allen beliebig oft differenzierbaren Funktionen $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, für welche jede Halbnorm $p_{m,n}(\varphi)$ endlich ist.

c) Die Topologie in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ wird durch die Halbnormen $p_{m,n}$ bestimmt: eine Folge (φ_k) in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ konvergiert gegen $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, wenn gilt:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_{m,n}(\varphi_k - \varphi) = 0 \text{ für jedes } m \in \mathbb{N} \text{ und jedes } n \in \mathbb{N}.$$

Es ist offensichtlich

$$p_{m,n} \geq p_{l,n} \text{ für } m \geq l. \quad (6.1)$$

Aufgabe 6.2 Zeigen Sie: $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ gehört genau dann zu $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, wenn für jedes Polynom P und jedes $n \in \mathbb{N}$ gilt: $\sup_{x \in \mathbb{R}} |P(x) \varphi^{(n)}(x)| < \infty$.

Aufgabe 6.3 Beweisen Sie: Die Funktion

$$\varphi(x) = \exp(-\alpha x^2), \quad \operatorname{Re} \alpha > 0$$

gehört zu $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ definieren wir das Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ durch

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \overline{g(x)} dx. \quad (6.2)$$

Der Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist bezüglich dieses Skalarproduktes nicht abgeschlossen.

Aufgabe 6.4 Beweisen Sie, dass folgende Operatoren $\mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ stetig sind:

a) für jedes Polynom P in \mathbb{R} der Multiplikationsoperator $M[P]$

$$M[P] : \varphi \mapsto P\varphi; \quad (6.3)$$

b) für jedes $n \in \mathbb{N}$ der Differentialoperator $D^{(n)} = \frac{d^n}{dx^n}$,

c) für jedes $y \in \mathbb{R}$ die Translation T_y :

$$[T_y \varphi](x) = \varphi(x - y); \quad (6.4)$$

d) für jedes $t \in \mathbb{R}$ der Multiplikationsoperator $M_t = M[\exp(itx)]$

$$M_t : \varphi \mapsto e^{itx} \varphi; \quad (6.5)$$

e) die Punktspiegelung

$$P\varphi(x) = \varphi(-x).$$

f) für jedes $\lambda > 0$ die Streckung

$$[S_\lambda \varphi](x) = \sqrt{\lambda} \varphi(\lambda x). \quad (6.6)$$

Darüber hinaus gilt für die Streckung

$$\|S_\lambda \varphi\|_{L^2} = \|\varphi\|_{L^2}.$$

Definition 6.5 Die **Faltung** (auch **Faltungsprodukt** genannt) $f * g$ zweier Funktionen f, g aus $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ wird durch

$$[f * g](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) g(x-y) dy \text{ für jedes } x \in \mathbb{R}, \quad (6.7)$$

gegeben.

Dass die Faltung in jedem Punkt wohldefiniert ist, sieht man aus der Abschätzung

$$\int_{\mathbb{R}} |f(y)| |g(x-y)| dy \leq \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_2(f)}{(1+|y|)^2} p_0(g) dy = 2p_2(f) p_0(g) \int_0^{\infty} \frac{dy}{(1+y)^2} = 2p_2(f) p_0(g).$$

Aufgabe 6.6 Zeigen Sie:

$$f * g = g * f.$$

Aufgabe 6.7 Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$. Beweisen Sie:

$$(f * g)^{(n_1+n_2)} = f^{(n_1)} * g^{(n_2)}.$$

Lemma 6.8 Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Beweis: Es gibt für jedes $m \in \mathbb{N}$ eine Konstante c_m mit

$$p_m(f * g) \leq c_m p_{m+2}(f) p_m(g). \quad (6.8)$$

Diese Abschätzung folgt aus der Kette

$$\begin{aligned} \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m (f * g)(x)| &\leq \int_{\mathbb{R}} |x|^m |f(y)| |g(x-y)| dy \leq \int_{\mathbb{R}} (|y| + |x-y|)^m |f(y)| |g(x-y)| dy \\ &= \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \int_{\mathbb{R}} (|y|^k |f(y)|) (|x-y|^{m-k} |g(x-y)|) dy \\ &\leq \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} \int_{\mathbb{R}} \frac{p_{k+2}(f)}{(1+|y|)^2} p_{m-k}(g) dy \\ &= 2 \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} p_{k+2}(f) p_{m-k}(g) \underbrace{\int_0^{\infty} \frac{dy}{(1+y)^2}}_{=1} \leq 2^{m+1} p_{m+n+1}(f) p_m(g), \end{aligned}$$

was aus (6.1) ersichtlich ist. Es gilt ferner

$$1 + |x| \leq \begin{cases} 2, & |x| \leq 1, \\ 2|x|, & |x| \geq 1, \end{cases}$$

was auf

$$\begin{aligned} p_m(f * g) &= \sup_{x \in \mathbb{R}} |(1 + |x|)^m (f * g)(x)| \leq 2^m p_0(f * g) + 2^m \sup_{x \in \mathbb{R}} |x^m (f * g)(x)| \\ &\leq 2^m p_2(f) p_0(g) + 2^m 2^{m+1} p_{m+2}(f) p_m(g) \leq c_m p_{m+2}(f) p_m(g) \end{aligned}$$

mit $c_m = 2^m (1 + 2^{m+1})$ führt. Nach (6.8) gilt

$$p_{m,n}(f * g) = p_m(f^{(n)} * g) \leq c_m p_{m+n+1}(f^{(n)}) p_m(g) = c_m p_{m+n+2}(f) p_m(g) < \infty.$$

6.2 Fouriertransformation

Definition 6.9 Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ definieren wir die Fouriertransformierte durch

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx, \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (6.9)$$

Man schreibt auch

$$\mathcal{F}[f] = \mathcal{F}_{x \rightarrow \xi}[f] = \widehat{f}.$$

Das Integral (6.9) konvergiert und es gilt

$$\left| \widehat{f}(\xi) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p_2(f)}{(1 + |x|)^2} dx = \frac{2p_2(f)}{\sqrt{2\pi}}. \quad (6.10)$$

6.2.1 Kommutationsformeln

Hilfssatz 6.10 Für $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\mathcal{F} \frac{d^n}{dx^n} = M[(i\xi)^n] \mathcal{F} \quad (6.11)$$

$$\frac{d^n}{d\xi^n} \mathcal{F} = \mathcal{F} M[(-ix)^n] \quad (6.12)$$

Beweis: Es reicht aus, die Relationen für $n = 1$ zu zeigen, denn für $n = n_1 + n_2$ ist

$$D^{(n)} = D^{(n_1)} D^{(n_2)} \text{ sowie } M[(i\xi)^n] = M[(i\xi)^{n_1}] M[(i\xi)^{n_2}].$$

Es ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F} \left[\frac{df}{dx} \right] &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f'(x) dx = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{de^{-i\xi x}}{dx} f(x) dx \\ &= \frac{i\xi}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx = i\xi \widehat{f}(\xi) = M[(i\xi)] \mathcal{F}(f)(\xi). \end{aligned}$$

Ferner gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\xi} \widehat{f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{d}{d\xi} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{d e^{-i\xi x}}{d\xi} f(x) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} (-ix) f(x) dx = \widehat{-ixf}(\xi). \end{aligned}$$

Der Satz ist bewiesen. □

Aufgabe 6.11 Zeigen Sie für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, dass $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist. Ferner ist $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ stetig.

Hinweis: Dies folgt aus (6.11), (6.12) und (6.10).

Seien $y, \eta \in \mathbb{R}$. Mit den Bezeichnungen (6.3) - (6.6) aus Aufgabe 6.4 hat man:

$$\mathcal{F}T_y = M_{-y}\mathcal{F} \tag{6.13}$$

$$T_\eta\mathcal{F} = \mathcal{F}M_\eta \tag{6.14}$$

In der Tat ist

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[T_y f](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} T_y f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} f(x-y) dx \stackrel{z=x-y}{=} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi y} e^{-i\xi z} f(z) dz = \frac{e^{-i\xi y}}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi z} f(z) dz = M_{-y}\widehat{f}(\xi) \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} [T_\eta \widehat{f}](\xi) &= \widehat{f}(\xi - \eta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i(\xi-\eta)x} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} [e^{i\eta x} f(x)] dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} [M_\eta f](x) dx = \mathcal{F}[M_\eta f](\xi). \end{aligned}$$

Die Punktspiegelung $Pf(x) = f(-x)$ und die komplexe Konjugation $Kf(x) = \overline{f(x)}$ kommutieren wie folgt mit \mathcal{F} :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[Pf](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} f(-x) dx \stackrel{y=-x}{=} -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{+\infty}^{-\infty} e^{i\xi \cdot y} f(y) dy = \widehat{f}(-\xi), \\ \mathcal{F}[Kf](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \overline{f(x)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{e^{i\xi \cdot x} f(x)} dx = \overline{\widehat{f}(-\xi)}, \\ K\mathcal{F}[f](\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \overline{e^{-i\xi x} f(x)} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi \cdot x} \overline{f(x)} dx = \widehat{\overline{f}}(-\xi). \end{aligned}$$

Es ist also

$$\mathcal{F}P_x = P_\xi \mathcal{F} \quad (6.15)$$

$$\mathcal{F}K = KP_\xi \mathcal{F} \quad (6.16)$$

$$K\mathcal{F} = P_\xi \mathcal{F}K. \quad (6.17)$$

Insbesondere ist die Fouriertransformierte einer geraden bzw. ungeraden Funktion wiederum eine gerade bzw. ungerade Funktion. Die Fouriertransformierte einer reellwertigen Funktion (mit $Kf = f$ also) ist aber nicht reellwertig, sondern erfüllt $\widehat{f}(-\xi) = \overline{f(\xi)}$.

Eine weitere nützliche Relation ist

$$\mathcal{F}S_\lambda = S_{1/\lambda}\mathcal{F}. \quad (6.18)$$

Sie folgt aus

$$\begin{aligned} \widehat{S_\lambda f}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \sqrt{\lambda} f(\lambda x) dx = \frac{\sqrt{\lambda}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-i\frac{\xi}{\lambda}(\lambda x)\right) f(\lambda x) dx \\ &= \frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-i\frac{\xi}{\lambda}y\right) f(y) dy = \frac{1}{\sqrt{\lambda}\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-i\frac{\xi}{\lambda}y\right) f(y) dy \\ &= \sqrt{\frac{1}{\lambda}} \widehat{f}\left(\frac{\xi}{\lambda}\right) = S_{1/\lambda}\widehat{f}(\xi). \end{aligned}$$

6.2.2 Fouriertransformation der Gaußschen Funktion

Lemma 6.12 Für

$$\Phi(x) = \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

gilt

$$\mathcal{F}\Phi = \Phi. \quad (6.19)$$

Beweis. Wir bezeichnen mit $L : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$ den Differentialoperator $L_x = \frac{d}{dx} + M[x]$:

$$L_x f(x) = f'(x) + xf(x).$$

Der Nullraum dieses Operators besteht aus den Funktionen $\{\lambda\Phi : \lambda \in \mathbb{R}\}$. In der Tat sei für ein $f = \Phi g$ die Gleichung $f' + xf = 0$ erfüllt. Mit $\Phi' = -x\Phi$ hat man dann

$$0 = \Phi'g + \Phi g' + x\Phi g = \Phi g'.$$

Daraus folgt $g = \text{const.}$

Aus (6.11, 6.12) folgt

$$\mathcal{F}L_x = \mathcal{F}(D + iM[-ix]) = M[i\xi]\mathcal{F} + iD\mathcal{F} = i(M[\xi]\mathcal{F} + D\mathcal{F}) = iL_\xi\mathcal{F}.$$

Für jede Funktion f aus dem Nullraum von L bedeutet das, dass $\mathcal{F}[f] = \widehat{f}$ wiederum zum Nullraum von L gehört. Insbesondere ist $\widehat{\Phi} = \lambda\Phi$ mit einem $\lambda \in \mathbb{C}$. Die Konstante λ ergibt sich aus der Relation

$$\begin{aligned} \lambda = \widehat{\Phi}(0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right) dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy \right)^{1/2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr d\varphi \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} e^{-\frac{1}{2}r^2} r dr \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (2\pi)^{1/2} = 1. \end{aligned}$$

6.2.3 Rücktransformation

Die Transformation $\mathcal{F}^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{S}(\mathbb{R})$, gegeben durch

$$\mathcal{F}^*[g](x) = \check{f}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi \cdot x} g(\xi) d\xi, \quad (6.20)$$

ist zu \mathcal{F} adjungiert:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}^* f, g \rangle &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi \cdot x} f(\xi) d\xi \right) \overline{g(x)} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) \overline{\left(\int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} g(\xi) d\xi \right)} dx = \langle f, \mathcal{F}g \rangle. \end{aligned}$$

Es gilt offensichtlich

$$\mathcal{F}^* = P\mathcal{F} \text{ und } \mathcal{F} = P\mathcal{F}^* \quad (6.21)$$

wegen

$$\mathcal{F}^*[g](x) = \mathcal{F}[g](-x) \text{ bzw. } \mathcal{F}[f](\xi) = \mathcal{F}^*[f](-\xi)$$

Satz 6.13 Für jedes $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ gilt

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \widehat{f}(\xi) d\xi = \mathcal{F}^*[\mathcal{F}f](x). \quad (6.22)$$

Bemerkung: Den Satz 6.13 kann man wie folgt umschreiben:

$$\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F}^*, \quad (6.23)$$

$$(\mathcal{F}^*)^{-1} = \mathcal{F}. \quad (6.24)$$

Beweis: Die naheliegendste Lösung wäre, den Ausdruck (6.9) für die Fouriertransformierte \widehat{f} in (6.22) einzusetzen und Integration nach ξ und y zu vertauschen:

$$\mathcal{F}^*[\mathcal{F}f](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{-i\xi y} f(y) dy d\xi \stackrel{?}{=} \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi(x-y)} d\xi \right) f(y) dy.$$

Das führt aber auf das divergente Integral $\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi(x-y)} d\xi$, das nicht im Rahmen der gewöhnlichen Funktionenklassen, wie z.B. C oder L^2 , bestimmt werden kann. Um $\mathcal{F}^*[\mathcal{F}f]$ doch auszurechnen, approximieren wir den Operator \mathcal{F}^* durch $\mathcal{F}_\varepsilon^*$, $\varepsilon > 0$, gegeben durch

$$\mathcal{F}_\varepsilon^*[g](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2\xi^2} g(\xi) d\xi.$$

Es ist offensichtlich

$$\mathcal{F}_\varepsilon^*[g] \rightrightarrows \mathcal{F}^*g \text{ für jedes } g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Es gilt für $f_\varepsilon = \mathcal{F}_\varepsilon^*[\mathcal{F}f]$:

$$f_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2\xi^2} \widehat{f}(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi(x-y)} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2\xi^2} f(y) dy d\xi.$$

In diesem Integral darf man Integrationsreihenfolge vertauschen, denn die Funktion $e^{i\xi(x-y)} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2\xi^2}$ ist schnell fallend (die gehört zum Schwartzraum, genauso wie f). Es gilt

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} e^{i\xi(x-y)} e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2\xi^2} d\xi \right) f(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F} \left[e^{-\frac{1}{2}\varepsilon^2\xi^2} \right] (y-x) f(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{F} \left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} S_\varepsilon \Phi \right] (y-x) f(y) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(S_{\frac{1}{\varepsilon}} \Phi \right) (x-y) f(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} (f * \Phi_\varepsilon)(x) \end{aligned}$$

mit

$$\Phi_\varepsilon(y) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \left(S_{\frac{1}{\varepsilon}} \Phi \right) (y) = \frac{1}{\varepsilon} \Phi \left(\frac{y}{\varepsilon} \right) = \frac{1}{\varepsilon} \exp \left(-\frac{1}{2} \frac{y^2}{\varepsilon^2} \right). \quad (6.25)$$

Für Φ_ε gilt: $\Phi_\varepsilon(y) > 0$ für alle y , und

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Phi_\varepsilon(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \Phi(y) dy = \widehat{\Phi}(0) = \Phi(0) = 1.$$

Hilfssatz 6.14 Seien $\rho \in L^1(\mathbb{R})$ mit $\int_{\mathbb{R}} \rho dx = 1$ und $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit

$$\|f\|_1 = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}} |f'(x)| < \infty.$$

Wir bezeichnen

$$\rho_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon} \rho \left(\frac{x}{\varepsilon} \right)$$

Dann konvergiert $\rho_\varepsilon * f$ für $\varepsilon \rightarrow 0$ gegen f gleichmäßig auf ganz \mathbb{R} , d.h. $\forall \delta > 0 \exists \varepsilon_0$ mit

$$|(\rho_\varepsilon * f)(x) - f(x)| < \delta$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $\varepsilon < \varepsilon_0$.

Bemerkung: Eine Folge $(\rho_m)_{m \in \mathbb{N}}$ bzw. eine Familie $(\rho_\varepsilon)_{\varepsilon > 0}$ mit der Eigenschaft

$$f * \rho_m \rightrightarrows f \text{ für } m \rightarrow \infty \text{ bzw. } f * \rho_\varepsilon \rightrightarrows f \text{ für } \varepsilon \rightarrow 0$$

für alle f heißt δ -Folge bzw. δ -Familie.

Beweis des Hilfssatzes: Es ist

$$\int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\varepsilon} \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) dx \stackrel{y=\frac{x}{\varepsilon}}{=} \int_{\mathbb{R}} \rho(y) dy = 1$$

für alle ε . Darüber hinaus ist

$$\int_{|x| > a\varepsilon} |\rho_\varepsilon(x)| dx = \frac{1}{\varepsilon} \int_{|x| > a\varepsilon} \left| \rho\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right| dx \stackrel{y=\frac{x}{\varepsilon}}{=} \int_{|y| > a} |\rho(y)| dy = \kappa(a)$$

mit $\kappa(a) \rightarrow 0$ für $a \rightarrow \infty$. Es ist

$$\begin{aligned} (f * \rho_\varepsilon)(x) - f(x) &= \int_{\mathbb{R}} \rho_\varepsilon(x-y) [f(y) - f(x)] dy \\ &= \left(\int_{|x-y| \leq a\varepsilon} + \int_{|x-y| > a\varepsilon} \right) \rho_\varepsilon(x-y) [f(y) - f(x)] dy = I_{\leq} + I_{>} \end{aligned}$$

für jedes $a > 0$. Bei festem $\delta > 0$ wähle man $a > 0$ mit

$$2 \|f\|_{\infty} \kappa(a) < \delta/2$$

und dazu ein ε_0 mit

$$a\varepsilon_0 \|\nabla f\|_{\infty} \kappa(0) < \delta/2.$$

Dann ist für alle $x \in \mathbb{R}$ und alle $\varepsilon < \varepsilon_0$

$$|I_{>}| \leq 2 \|f\|_{\infty} \int_{|z| > a\varepsilon} \rho_\varepsilon(z) dz = 2 \|f\|_{\infty} \kappa(a) < \frac{\delta}{2}$$

bzw.

$$|I_{\leq}| \leq \sup_{|x-y| \leq a\varepsilon} |f(y) - f(x)| \int_{\mathbb{R}} |\rho_\varepsilon(z)| dz \leq a\varepsilon \|\nabla f\|_{\infty} \kappa(0) < \frac{\delta}{2}.$$

Insgesamt bekommt man so die Abschätzung $|\rho_\varepsilon * f(x) - f(x)| < \delta$. ◇

Mit diesem Hilfssatz (für $\rho = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\Phi$) haben wir bewiesen:

$$f_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f * \Phi_\varepsilon \rightrightarrows f.$$

Aus der Relation

$$f_\varepsilon(x) \rightarrow f(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{i\xi x} \widehat{f}(\xi) d\xi,$$

folgt nun (6.22). □

Wir haben soeben gezeigt: $\mathcal{F}^*\mathcal{F} = \mathcal{F}\mathcal{F}^* = \mathbf{id}$. Mit den Kommutationsregeln $P\mathcal{F} = \mathcal{F}P$ und $\mathcal{F} = P\mathcal{F}^*$ hat man nun

$$\mathcal{F}^2 = \mathcal{F}\mathcal{F} = P\mathcal{F}^*\mathcal{F} = P,$$

also

$$\mathcal{F}^2[f](x) = f(-x).$$

Analog ist $(\mathcal{F}^*)^2 = P$. Es gilt also

$$\mathcal{F}^4 = (\mathcal{F}^*)^4 = \mathbf{id}.$$

6.2.4 Fouriertransformation und die Faltung

Es ist

$$\begin{aligned} \widehat{f * g}(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi x} \left(\int_{\mathbb{R}} f(y) g(x-y) dy \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} e^{-i\xi \cdot y} f(y) e^{-i\xi \cdot (x-y)} g(x-y) dy dx \\ &= \sqrt{2\pi} \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi \cdot y} f(y) dy \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-i\xi \cdot z} g(z) dz \right) \\ &= \sqrt{2\pi} \widehat{f}(\xi) \widehat{g}(\xi). \end{aligned}$$

Analog gilt für \mathcal{F}^*

$$(f * g)^\vee(\xi) = \sqrt{2\pi} f^\vee(\xi) g^\vee(\xi).$$

Diese Formel, zusammen mit (6.23) und (6.24), ergibt:

$$\widehat{a * b} = \underbrace{\mathcal{F}\mathcal{F}^*}_{=\mathbf{id}} \underbrace{(\widehat{a * b})}_{f * g} = \mathcal{F} \left[\sqrt{2\pi} (\widehat{a})^\vee (\widehat{b})^\vee \right] = \mathcal{F} \left[\sqrt{2\pi} ab \right] = \sqrt{2\pi} \widehat{ab}.$$

Es gilt also

$$\widehat{f * g} = \sqrt{2\pi} \widehat{f} \widehat{g}, \tag{6.26}$$

$$\widehat{ab} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{a} * \widehat{b}. \tag{6.27}$$

Wir fassen einige wichtige Eigenschaften der Fouriertransformation in der folgenden Tabelle zusammen:

	Funktion f	Fouriertransformierte $\mathcal{F}[f] = \widehat{f}$
1.	$D_x^{(n)} f, n \in \mathbb{N},$	$(i\xi)^n \widehat{f}$
2.	$(-ix)^n f, n \in \mathbb{N},$	$D_\xi^{(n)} \widehat{f}$
3.	$f(x - c), c \in \mathbb{R},$	$e^{-ic\xi} \widehat{f}(\xi)$
4.	$e^{icx} f, c \in \mathbb{R},$	$\widehat{f}(\xi - c)$
5.	$f(-x)$	$\widehat{f}(-\xi)$
6.	$\overline{f(x)}$	$\overline{\widehat{f}(-\xi)}$
7.	$\sqrt{\lambda} f(\lambda x)$	$\sqrt{\frac{1}{\lambda}} \widehat{f}\left(\frac{x}{\lambda}\right)$
8.	$f * g$	$\sqrt{2\pi} \widehat{f} \widehat{g}$
9.	fg	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \widehat{f} * \widehat{g}$
10.	$\exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$	$\exp\left(-\frac{1}{2}\xi^2\right)$

(6.28)

6.2.5 Parsevalsche Gleichung

Satz 6.15 *Es ist für alle $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$*

$$\langle \widehat{f}, \widehat{g} \rangle = \langle f, g \rangle. \tag{6.29}$$

Beweis: Man hat

$$\langle \mathcal{F}[f], \mathcal{F}[g] \rangle = \langle f, \mathcal{F}^* \mathcal{F}[g] \rangle = \langle f, \text{id}[g] \rangle = \langle f, g \rangle,$$

was zu beweisen war. □

Insbesondere ist

$$\|f\|_{L^2} = \|\widehat{f}\|_{L^2}. \quad (6.30)$$

Aufgabe 6.16 Berechnen Sie Fouriertransformierte von

$$a) \chi[-a, a], \quad b) \frac{\sin(ax)}{x}, \quad c) e^{-a|x|}, \quad d) (x^2 + a^2)^{-1}.$$

Bemerkung: Diese Funktionen liegen zwar nicht in $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, man kann aber die Definition (6.9) trotzdem anwenden.

6.2.6 Fouriertransformation in $L^2(\mathbb{R})$

Der Hilbertraum $L^2(\mathbb{R})$ ist eine Vervollständigung des Schwartzraums $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ bezüglich der Norm

$$\|f\|_{L^2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 ds \right)^{1/2}.$$

Für ein $f \in L^2(\mathbb{R})$ mit

$$f = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n, \quad \varphi_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \text{ für alle } n \in \mathbb{N},$$

definiert man die Fouriertransformierte durch

$$\mathcal{F}[f] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}[\varphi_n]. \quad (6.31)$$

Da \mathcal{F} eine stetige lineare Abbildung auf $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist, und $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ dicht in $L^2(\mathbb{R})$ liegt, ist \mathcal{F} durch (6.31) auf ganz $L^2(\mathbb{R})$ wohldefiniert und erfüllt (6.29), insbesondere auch (6.30).

7 Verallgemeinerte Inverse und Regularisierung durch Filterung

7.1 Das Moore-Penrose-Inverse

Wir betrachten $X = \mathbb{R}^n$ und $Y = \mathbb{R}^m$ und einen linearen Operator $A : X \rightarrow Y$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. Es gilt

$$\mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*) \text{ bzw. } \mathcal{R}(A^*) = \mathcal{N}(A)^\perp$$

Die allgemeine Struktur eines Operators zwischen endlichdimensionalen Euklidischen Räumen wird durch die Orthogonalzerlegung

$$\begin{aligned} X &= \mathcal{N}(A) \oplus \mathcal{R}(A^*), \\ Y &= \mathcal{N}(A^*) \oplus \mathcal{R}(A), \end{aligned}$$

gegeben, wobei der kanonisch induzierte Isomorphismus

$$A : X/\mathcal{N}(A) \rightarrow \mathcal{R}(A)$$

auf

$$\mathcal{R}(A^*) \simeq \mathcal{R}(A)$$

führt. Anschaulich kann man X , Y und A in Block-Form wie folgt darstellen:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_0 \end{pmatrix}, \quad x_1 \in \mathcal{R}(A^*), \quad x_0 \in \mathcal{N}(A), \quad (7.1)$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_0 \end{pmatrix}, \quad y_1 \in \mathcal{R}(A), \quad y_0 \in \mathcal{N}(A^*), \quad (7.2)$$

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0^{n-r,r} \\ 0^{r,m-r} & 0^{n-r,m-r} \end{pmatrix}, \quad A_1 \in \text{Gl}(\mathbb{R}^r), \quad r = \text{Rg } A = \text{Rg } A^*. \quad (7.3)$$

Dabei ist

$$A^* = \begin{pmatrix} A_1^* & 0^{m-r,r} \\ 0^{r,n-r} & 0^{m-r,n-r} \end{pmatrix}. \quad (7.4)$$

Die Gleichung

$$Ax = y \quad (7.5)$$

ist genau dann lösbar, wenn $y \in \mathcal{R}(A)$, also $y \perp \mathcal{N}(A^*)$ ist.

Für ein $y \in Y$ definieren wir die **verallgemeinerte** Lösung x^+ der Gleichung (7.5) (sogenannte **Moore-Penrose-Inverse**) durch den folgenden Minimierungsprozess:

(i) Erst minimiere man den Abstand

$$d(Ax, y) = \|Ax - y\|;$$

(ii) dann unter allen Elementen x , die $d(Ax, y)$ minimieren, wähle man x^+ mit der kleinsten Norm $\|x\|$.

Man kann beide Schritte explizit angeben. Es gilt für jedes $x \in X$:

$$\|Ax - y\| = \min \{ \|Ax' - y\| : x' \in X \} \iff Ax = y_1, \quad (7.6)$$

wobei y_1 der Lotfußpunkt $y_1 = \text{Pr}_{\mathcal{R}(A)} y$ ist, siehe (7.2). Ferner ist x^+ das kleinste (bzgl. der Euklidischen Norm) Element des affinen Unterraums

$$A^{-1}(y_1) = \left\{ \begin{pmatrix} A_1^{-1}y_1 \\ x_0 \end{pmatrix} : x_0 \in \mathcal{N}(A) \right\}.$$

Daraus folgt

$$x^+(y) = \begin{pmatrix} A_1^{-1}y_1 \\ 0^{n-r} \end{pmatrix}. \quad (7.7)$$

Aus diesen beiden Schritten (i) $y \mapsto y_A$ und (ii) $A^{-1}(y_A) \mapsto x^+$ ergibt sich der resultierende Moore-Penrose-Operator

$$A^+ : y \mapsto x^+.$$

Aufgabe 7.1 *Beweisen Sie: $A^+ : Y \rightarrow X$ ist linear und stetig und wird durch*

$$A^+ = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & 0^{m-r,r} \\ 0^{r,n-r} & 0^{m-r,n-r} \end{pmatrix} \quad (7.8)$$

gegeben.

Man kann (i) in der Form

$$A^*Ax^+ = A^*y \quad (7.9)$$

umschreiben wegen

$$Ax - y = y_1 - y = y_0 \in \mathcal{R}(A)^\perp = \mathcal{N}(A^*).$$

Die Bedingung (ii) kann man nun durch

$$x^+ \in \mathcal{R}(A^*) \quad (7.10)$$

ersetzen, weil $A^{-1}(y_A)$ eine Verschiebung des linearen Unterraums $\mathcal{N}(A)$ darstellt

$$A^{-1}(y_A) = x^+ + \mathcal{N}(A),$$

und x^+ das einzige Element von $A^{-1}(y_A)$ ist, das senkrecht auf $\mathcal{N}(A)$ steht, also im $\mathcal{N}(A)^\perp = \mathcal{R}(A^*)$ liegt (oder man guckt einfach (7.7)). Die Formeln (7.7) und (7.8) beschreiben x^+ bzw. A^+ in Koordinatenform. Im Unterschied dazu geben die Bedingungen (7.9) und (7.10) die verallgemeinerte Inverse koordinatenfrei.

7.2 Tychonoff-Phillips-Regularisierung

Sei wieder $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$. Man definiere für ein $\alpha > 0$ und $y \in Y$ das Tychonoff-Phillips-Funktional $J_{\alpha,y}$ auf X durch

$$J_{\alpha,y}(x) = \|Ax - y\|^2 + \alpha \|x\|^2.$$

Wir bezeichnen mit $x_{\alpha,y}$ das Element, dass $J_{\alpha,y}$ minimiert.

Aufgabe 7.2 Beweisen Sie: x_α wird durch die obige Definition eindeutig bestimmt.

Lösung: Das Funktional

$$J_{\alpha,y}(x) = x^\top (A^*A + \alpha I)x - 2y^\top Ax + y^\top y$$

ist strikt konvex, da die Matrix $A^*A + \alpha I$ strikt positiv ist. Daher hat $J_{\alpha,y}$ genau ein Minimum. \square

Satz 7.3 $x_{\alpha,y}$ ist die einzige Lösung der Gleichung

$$(A^*A + \alpha I)x_{\alpha,y} = A^*y. \tag{7.11}$$

Beweis: Wir bezeichnen mit A_α die symmetrische Matrix, die $A_\alpha A_\alpha = A^*A + \alpha I$ erfüllt, durch b den Kovektor $b = A^*y$ und durch c die Konstante $y^\top y$. Dann ist

$$J_{\alpha,y}(x) = (A_\alpha x)^\top (A_\alpha x) - 2b^\top x + c = (A_\alpha x)^\top \underbrace{(A_\alpha x)}_{=z} - 2 \underbrace{(A_\alpha^{-1}b)^\top}_{=u^\top} (A_\alpha x) + c.$$

Quadratische Ergänzung ergibt

$$J_{\alpha,y}(x) = z^\top z - 2u^\top z + c = (z - u)^\top (z - u) + (c - u^\top u) \geq (c - u^\top u),$$

wobei das Minimum bei $z = u$, also

$$A_\alpha x = A_\alpha^{-1} (A^*y)$$

erreicht wird. Die letzte Gleichung ist zu

$$(A^*A + \alpha I)x = A^*y$$

äquivalent. \square

Man kann die Lösung $x_{\alpha,y}$ mithilfe der Singulärwertzerlegung explizit angeben. Seien (u_j) , $j = 1, \dots, n$, bzw. (v_k) , $k = 1, \dots, m$, orthonormierte Basen in X bzw. in Y mit der Eigenschaft

$$\begin{aligned} Au_j &= \sigma_j v_j, \quad j = 1, \dots, r = \text{Rg } A, \\ Au_j &= 0, \quad j \geq r + 1, \\ A^*v_k &= \sigma_k u_k, \quad k = 1, \dots, r, \\ A^*v_k &= 0, \quad k \geq r + 1. \end{aligned}$$

Es ist insbesondere $(\sigma_j, u_j, v_j)_{1..r}$ das singuläre System von A_1 , siehe (7.3). Dann ist (7.11) zu

$$\begin{cases} (\sigma_j^2 + \alpha) \langle x, u_j \rangle = \sigma_j \langle y, v_j \rangle, & j = 1, \dots, r \\ \alpha \langle x, u_j \rangle = 0, & j \geq r + 1, \end{cases}$$

äquivalent. Daraus folgt

$$x_{\alpha,y} = \sum_{j=1}^{\text{Rg } A} \frac{\sigma_j}{\sigma_j^2 + \alpha} \langle y, v_j \rangle u_j. \tag{7.12}$$

Satz 7.4 *Es gilt*

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} x_{\alpha, y} = A^+ y = x^+.$$

Beweis: Aus (7.12) folgt, dass ein Limes existiert und es gilt

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} x_{\alpha, y} = \sum_{j=1}^{\text{Rg } A} \frac{1}{\sigma_j} \langle y, v_j \rangle u_j = \begin{pmatrix} A_1^{-1} y_1 \\ 0 \end{pmatrix} = x^+,$$

siehe (7.7). □

7.3 Asymptotische Regularisierung

Seien nun X und Y Hilberträume und $A : X \rightarrow Y$ kompakt. Die Formel

$$x^+ = \sum_{\sigma_j > 0} \frac{1}{\sigma_j} \langle y, v_j \rangle u_j \tag{7.13}$$

kann sofort auf den unendlichdimensionalen Fall übertragen werden, wobei (σ_j, u_j, v_j) , $j \in J$ (entweder endlich oder \mathbb{N}) das singuläre System von A ist mit $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots > 0$. Für $y \in \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^*)$ konvergiert die Reihe

$$\sum_{j \in J} \frac{1}{\sigma_j^2} \langle y, v_j \rangle^2,$$

deswegen ist x^+ wohl definiert und gehört zu $\mathcal{N}(A)^\perp$. Das Element x^+ löst die Gleichung $A^* A x^+ = A^* y$. Allerdings ist dann der Operator A^+ nicht immer stetig.

Aufgabe 7.5 *Beweisen Sie: Der Operator $A^+ : y \mapsto x^+$ ist nicht beschränkt falls die Summe (7.13) unendlich viele Summanden hat.*

Die asymptotische Regularisierung erlaubt uns die verallgemeinerte Inverse zu bestimmen ohne Singulärwertzerlegung durchführen zu müssen. Für ein festes y lösen wir das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) + A^* A x(t) &= A^* y, \quad t > 0, \\ x(0) &= 0. \end{aligned} \tag{7.14}$$

In Koordinatenform kann man $x(t)$ als die Summe

$$x(t) = x_0 + \sum_{\sigma_j > 0} \langle x(t), u_j \rangle u_j$$

darstellen mit $x_0 \in \mathcal{N}(A)$. (7.14) nimmt dann die Gestalt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x(t), u_j \rangle + \sigma_j^2 \langle x(t), u_j \rangle &= \sigma_j \langle y, v_j \rangle, \quad t > 0, \quad j \in J, \\ x_0 &\equiv 0. \end{aligned}$$

Die Lösung dieser gewöhnlichen Differentialgleichung wird durch

$$\langle x(t), u_j \rangle = \frac{1 - \exp(-\sigma_j^2 t)}{\sigma_j} \langle y, v_j \rangle, \quad j \in J,$$

gegeben. Das ergibt

$$x(t) = \sum_{j \in J} \frac{1 - \exp(-\sigma_j^2 t)}{\sigma_j} \langle y, v_j \rangle u_j = \sum_{j \in J} \frac{1 - \exp(-\sigma_j^2 t)}{\sigma_j^2} \langle A^* y, u_j \rangle u_j.$$

Für jedes feste $t > 0$ gilt die Abschätzung

$$\sum_{j \in J} \left| \frac{1 - \exp(-\sigma_j^2 t)}{\sigma_j^2} \right|^2 \langle A^* y, u_j \rangle^2 \leq t^2 \sum_{j \in J} \langle A^* y, u_j \rangle^2 \leq t^2 \|A^* y\|^2,$$

daraus folgt $x(t) \in \mathcal{R}(A^*)$, konkret

$$x(t) = A^* \left(\sum_{j \in J} \frac{1 - \exp(-\sigma_j^2 t)}{\sigma_j^2} \langle y, v_j \rangle v_j \right).$$

Man sieht, dass $x(t)$ für $t \rightarrow \infty$ einem stationären Zustand x_∞ entgegenstrebt und es gilt

$$x_\infty = \sum_{j \in J} \frac{1}{\sigma_j} \langle y, v_j \rangle u_j = x^+.$$

8 Landweber-Iterationsverfahren

Wie wir schon wissen, stellt die Landweber Iteration

$$x_m = (I - \alpha A^* A) x_{m-1} + \alpha A^* y, \quad x_0 = 0, \quad (8.1)$$

eine Regularisierung der Lösung der Normalgleichung

$$x = (I - \alpha A^* A) x + \alpha A^* y \quad (8.2)$$

dar. Den Algorithmus (8.1) kann man explizit angeben in der Form

$$x_m = \left[\alpha \sum_{j=0}^{m-1} (I - \alpha A^* A)^j \right] A^* y = F_m(A^* A) A^* y$$

mit dem Polynom $(m - 1)$ -tes Grades

$$F_m(\lambda) = \alpha \sum_{j=0}^{m-1} (1 - \alpha\lambda)^j = \alpha \frac{1 - (1 - \alpha\lambda)^m}{\alpha\lambda} = \frac{1 - (1 - \alpha\lambda)^m}{\lambda} \quad (8.3)$$

Wählen wir ein $\alpha \in (0, \|A\|^{-2})$, so konvergieren $F_m(\lambda)$ punktweise gegen $\frac{1}{\lambda}$ für $m \rightarrow \infty$ für alle $\lambda \in (0, \|A\|^2]$. Die Folge der Residuenpolynome

$$p_m(\lambda) = 1 - \lambda F_m(\lambda) = (1 - \alpha\lambda)^m$$

erfüllt

$$\deg p_m = m, \quad (i)$$

$$p(0) = 1, \quad (ii)$$

$$\{p_m\} \text{ ist gleichmäßig beschränkt auf } [0, \|A\|^2], \quad (iii)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} p_m(\lambda) \rightarrow 0 \text{ für jedes } \lambda \in (0, \|A\|^2]. \quad (iv)$$

8.1 Tschebyscheff-Iterationsverfahren von Stiefel

Erfüllt eine Polynomenfolge $\{p_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ die obigen Bedingungen, so ist

$$F_m = \frac{1 - p_m(\lambda)}{\lambda}$$

ein regularisierender Filter. Man kann versuchen, durch eine geschickte Wahl der Filterung F_n eine bessere Konvergenz zu erzielen, als bei dem Landweber-Verfahren.

8.1.1 Tschebyscheffsche Polynome 1.Art

Tschebyscheffsche Polynome 1.Art werden durch erzeugende Funktion

$$g_1(t, x) = \frac{1 - t^2}{1 - 2xt + t^2} = T_0(x) + 2 \sum_{i=1}^{\infty} T_i(x) t^i$$

definiert, oder äquivalent durch

$$g_2(t, x) = \frac{1 - xt}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{i=0}^{\infty} T_n(x) t^n, \quad (8.4)$$

für $|x| \leq 1$ und $|t| < 1$. Aus

$$g_2(t, 1) = \frac{1}{1 - t} = 1 + t + t^2 + \dots$$

folgt sofort

$$T_n(1) = 1 \text{ für alle } n.$$

Analog hat man

$$g_2(t, -1) = \frac{1}{1 + t} = 1 - t + t^2 - \dots$$

Daraus folgt

$$T_n(-1) = (-1)^n \text{ für alle } n.$$

Lemma 8.1 Die Polynome $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ erfüllen die zweigliedrige Rekursion

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x) \quad (8.5)$$

für alle x . Dabei gilt

$$T_0(x) = 1 \text{ und } T_1(x) = x.$$

Beweis: Wir schreiben (8.4) in der Form

$$1 - xt = (1 - 2xt + t^2) \sum_{i=0}^{\infty} T_n(x) t^n = \sum_{i=0}^{\infty} D_n(x) t^n$$

und machen Koeffizientenvergleich. Es ist

$$\begin{aligned} D_0 &= T_0, \quad D_1 = T_1 - 2xT_0, \\ D_n &= T_n - 2xT_{n-1} + T_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{aligned}$$

Aus $D_0 = 1$, $D_1 = -x$, $D_n = 0$, $n \geq 2$, folgt dann $T_0 = 1$, $T_1 = -x + 2x = x$ und $T_n = 2xT_{n-1} - T_{n-2}$ für $n \geq 2$. \square

Tschebyscheffsche Polynome T_n haben eine explizite Darstellung

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad x \in [-1, 1], \quad (8.6)$$

oder, nach der Substitution $x = \cos \theta$:

$$T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta). \quad (8.7)$$

Die Polynome $\{T_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ bilden eine vollständige orthogonale Basis in L^2 auf $[-1, 1]$ mit Gewicht $(1 - x^2)^{-1/2}$. Sie erfüllen

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx &\stackrel{x=\cos\theta}{=} \int_0^\pi \frac{\cos(n\theta) \cos(m\theta)}{\sin\theta} \sin\theta d\theta = \int_0^\pi \cos(n\theta) \cos(m\theta) d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos([n+m]\theta) + \cos([n-m]\theta)] d\theta = 0 \text{ falls } n \neq m. \end{aligned}$$

Für $n = m > 0$ ergibt sich

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi d\theta = \frac{\pi}{2}.$$

Für $n = m = 0$ ist das Ergebnis

$$\frac{1}{2} \int_0^\pi [1 + 1] d\theta = \pi.$$

Die endgültige Antwort heißt

$$\int_{-1}^1 \frac{T_n(x) T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx = \begin{cases} \frac{1}{2} \pi \delta_{n,m}, & n \text{ oder } m \neq 0 \\ \pi, & m = n = 0. \end{cases} \quad (8.8)$$

Die Funktion

$$\tilde{T}_n(\theta) = \cos(n\theta) = T_n(\cos\theta)$$

erfüllt die Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\frac{d^2 \tilde{T}_n}{d\theta^2} + n^2 \tilde{T}_n = 0. \quad (8.9)$$

Sie führt auf die Gleichung

$$(1-x^2) T_n'' - x T_n' + n^2 T_n = 0.$$

8.1.2 Tschebyscheffsche Polynome 2.Art

Die Gleichung (8.9) hat außer T_n eine weitere Lösung $V_n(\cos\theta) = \sin(n\theta)$, $n \geq 1$. Man definiert die Tschebyscheffsche Polynome 2.Art durch

$$U_n(\cos\theta) = \frac{V_{n+1}(\cos\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin([n+1]\theta)}{\sin\theta},$$

oder, äquivalent

$$U_n(x) = \frac{\sin([n+1] \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$$

Die Polynome U_n werden durch die erzeugende Funktion

$$g_3(t, x) = \frac{1}{1 - 2xt + t^2} = \sum_{i=0}^{\infty} U_n(x) t^n, \quad (8.10)$$

für $|x| \leq 1$ und $|t| < 1$, gegeben. Für $x = 1$ gilt

$$g_3(t, x) = \frac{1}{(1-t)^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{1-t} \right) = \frac{d}{dt} \left(\sum_{n=0}^{\infty} t^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} n t^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) t^n,$$

also

$$U_n(1) = n + 1.$$

Darüber hinaus gilt die Abschätzung

$$|U_n(x)| \leq n + 1 \text{ auf } [-1, 1].$$

Sie folgt aus der Abschätzung

$$|\sin(n+1)\theta| \leq (n+1) |\sin\theta|,$$

die man durch vollständige Induktion beweisen kann. Dabei tritt die Gleichheit nur für $|\sin\theta| = 1$ auf, also $x = \pm 1$.

Analog zu (8.5), folgert man aus (8.10) die zweigliedrige Rekursion

$$\begin{aligned} 1 &= U_0, \quad 0 = U_1 - 2xU_0, \\ 0 &= U_n - 2xU_{n-1} + U_{n-2}, \quad n \geq 2, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} U_0 &= 1, \quad U_1 = 2x, \\ U_n &= 2xU_{n-1} - U_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Die Polynome U_n sind bezüglich des Gewichtes $\sqrt{1-x^2}$ orthogonal:

$$\int_{-1}^1 U_n(x) U_m(x) \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \pi \delta_{n,m}.$$

Nun definieren wir eine Folge der Residuenpolynomen durch

$$p_n(\lambda) = \frac{1}{n+1} U_n(1-2\lambda). \quad (8.12)$$

Die Folge $\{p_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ genügt den Bedingungen (i)-(iii). Wir müssen nur noch (iv) überprüfen, also die Konvergenz $U_n(x) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, zeigen. Für $0 < \lambda < 1$ ist $|1-2\lambda| < 1$. Für $\theta = \arccos(1-2\lambda)$ folgt $\theta \in (0, \pi)$. Es gilt dann

$$p_{n-1}(\lambda) = \frac{\sin(n\theta)}{n \sin\theta} < \frac{1}{n \sin\theta} = \frac{1}{n \sqrt{1-(1-2\lambda)^2}} = \frac{1}{2n \sqrt{\lambda - \lambda^2}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Die letzte Bedingung ist auch erfüllt für $\lambda < 1$. Man kann das entsprechende Verfahren

$$x_m = F_m (A^*A) A^*y \text{ mit } F_m = \frac{1 - p_m(\lambda)}{\lambda} \quad (8.13)$$

nun für alle Operatoren mit $\|A\| < 1$ anwenden.

Aufgabe 8.2 *Beweisen Sie die Rekursion*

$$p_0(\lambda) = 1, \quad p_1(\lambda) = 1 - 2\lambda,$$

$$p_m = p_{m-1} + \frac{m-1}{m+1}(p_{m-1} - p_{m-2}) - \frac{4m}{m+1}\lambda p_{m-1} \text{ für } m \geq 2.$$

Aufgabe 8.3 *Zeigen Sie: Die Folge (x_m) bestimmt durch (8.13) und (8.12), wird durch*

$$x_m = \frac{2m}{m+1}x_{m-1} - \frac{m-1}{m+1}x_{m-2} + \frac{4m}{m+1}A^*(y - Ax_{m-1}),$$

$$x_1 = x_0 + 2A^*(y - Ax_0),$$

gegeben.

Diese Methode heißt die Tschebyscheff-Methode von Stiefel.

9 Die Fundamentallösung der Helmholtzgleichung

9.1 Orthogonale Koordinatentransformationen.

Seien

- $U \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet mit kartesischen Koordinaten $u = (u^1, \dots, u^n)$,
- $X \subset \mathbb{R}^n$ ein offenes Gebiet mit kartesischen Koordinaten $x = (x^1, \dots, x^n)$,
- $T : U \rightarrow X$ eine stetig differenzierbare und bijektive Abbildung (so daß $T : u \mapsto x = T(u)$ ist).

Mit

$$T'(u) = \frac{dx}{du} = \left(\frac{\partial T^j(u)}{\partial u^k} \right)_{1 \leq j, k \leq n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial u^1} & \frac{\partial x^1}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial x^1}{\partial u^n} \\ \frac{\partial x^2}{\partial u^1} & \frac{\partial x^2}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial x^2}{\partial u^n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x^n}{\partial u^1} & \frac{\partial x^n}{\partial u^2} & \cdots & \frac{\partial x^n}{\partial u^n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad (9.1)$$

bezeichnen wir die Funktionalmatrix (Jakobimatrix) in u .

Definition 9.1 Die Abbildung T heißt orthogonale Koordinatentransformation, falls die Spalten

$$v_j = \left(\frac{\partial x^1}{\partial u^j}, \dots, \frac{\partial x^n}{\partial u^j} \right)^\top, \quad j = 1, \dots, n,$$

der Matrix $T'(u)$ paarweise orthogonal sind, d.h. $\langle v_j, v_k \rangle = 0$ für $j \neq k$.

Mit der Bezeichnung

$$v_j = g_j(u) e_j(u) \quad \text{mit} \quad \|e_j(u)\| = 1 \quad \text{und} \quad g_j(u) > 0$$

hat man also:

$$\langle e_j(u), e_k(u) \rangle = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j = k, \\ 0, & j \neq k, \end{cases} \quad 1 \leq j, k \leq n.$$

Somit bilden $\{e_1(u), \dots, e_n(u)\}$ für jedes $u \in U$ eine Orthonormalbasis im \mathbb{R}^n (ein sogenanntes "wanderndes Dreibein" bzw. "n-Bein").

Beispiel 9.2 a) Polarkoordinaten in \mathbb{R}^2 :

$$U = (0, \infty) \times (-\pi, \pi), \quad u = (r, \varphi), \\ X = \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_-, \quad x = (x^1, x^2).$$

Hier ist

$$x(u) = \begin{pmatrix} x^1(u) \\ x^2(u) \end{pmatrix} = T(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}, \\ T'(r, \varphi) = \frac{d(x^1, x^2)}{d(r, \varphi)} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{pmatrix}, \\ e_r = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \frac{x}{|x|} = \hat{x}, \quad g_r = 1, \\ e_\varphi = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad g_\varphi = r.$$

b) Kugelkoordinaten (oder sphärische Koordinaten) in \mathbb{R}^3 : $u = (r, \theta, \varphi)$.

$$\begin{aligned}
 x(u) &= \begin{pmatrix} x^1(u) \\ x^2(u) \\ x^3(u) \end{pmatrix} = T(r, \theta, \varphi) = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix}, \\
 T' &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi & r \cos \theta \cos \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \end{pmatrix}, \\
 e_r &= \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = \frac{x}{|x|} = \hat{x}, \quad e_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}, \\
 e_\varphi &= \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{aligned} g_r &= 1, \\ g_\theta &= r, \\ g_\varphi &= r \sin \theta. \end{aligned}
 \end{aligned}$$

Die inverse Funktionalmatrix

$$(T'(u(x)))^{-1} = \frac{du}{dx}$$

lässt sich im Falle einer orthogonalen Koordinatentransformation explizit schreiben. Da

$$T'(u) = \underbrace{\begin{pmatrix} e_1^1(u) & e_2^1(u) & \cdot & e_n^1(u) \\ e_1^2(u) & e_2^2(u) & \cdot & e_n^2(u) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_1^n(u) & e_2^n(u) & \cdot & e_n^n(u) \end{pmatrix}}_{A(u)} \underbrace{\begin{pmatrix} g_1(u) & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & g_2(u) & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & g_n(u) \end{pmatrix}}_{\text{diag}(g_1(u), \dots, g_n(u))}$$

ist, wobei die Matrix $A(u) = (e_1(u), \dots, e_n(u))$ unitär ist:

$$A^{-1} = A^* = A^t,$$

gilt die Relation:

$$\begin{aligned}
 \frac{du}{dx} &= \text{diag} \left(\frac{1}{g_1(T^{-1}(x))}, \dots, \frac{1}{g_n(T^{-1}(x))} \right) A^*(T^{-1}(x)) \\
 &= \begin{pmatrix} 1/g_1 & 0 & \cdot & 0 \\ 0 & 1/g_2 & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & 1/g_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1^1 & e_2^1 & \cdot & e_n^1 \\ e_1^2 & e_2^2 & \cdot & e_n^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ e_1^n & e_2^n & \cdot & e_n^n \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

oder

$$\frac{\partial u^k}{\partial x^j} = \frac{1}{g_k(u)} e_k^j(u).$$

Äquivalent dazu ist

$$\nabla u^k = \frac{1}{g_k(u)} e_k(u) \quad \text{oder} \quad e_k = g_k \nabla u^k, \quad k = 1, \dots, n. \tag{9.2}$$

9.1.1 Der Gradient

Sei $f \in C^1(X)$ eine skalare Funktion. Die Verkettung $f \circ T$ bezeichnen wir mit $\tilde{f} \in C^1(U)$:

$$\tilde{f}(u) = f(T(u)).$$

Wir wollen die Komponenten des Gradienten

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f(x)}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial f(x)}{\partial x^n} \right)^\top$$

bzgl. der "wandernden" Basis $\{e_1(u), \dots, e_n(u)\}$ finden und durch die partiellen Ableitungen $\partial \tilde{f} / \partial u^j$ ausdrücken. Mit der Kettenregel und (9.2) hat man:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \tilde{f}(u)}{\partial u^k} \frac{\partial u^k}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^n \frac{\partial \tilde{f}(u)}{\partial u^k} \frac{1}{g_k(u)} e_k^j(u) = \left(\sum_{k=1}^n \frac{1}{g_k(u)} \frac{\partial \tilde{f}(u)}{\partial u^k} e_k(u) \right)_j.$$

Daraus folgt:

$$\nabla_x f(x(u)) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{g_k(u)} \frac{\partial \tilde{f}(u)}{\partial u^k} e_k(u). \quad (9.3)$$

Beispiel 9.3 Insbesondere gilt

a) in Polarkoordinaten:

$$\nabla f(x) = \frac{\partial \tilde{f}(r, \varphi)}{\partial r} e_r(r, \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{f}(r, \varphi)}{\partial \varphi} e_\varphi(r, \varphi), \quad (9.4)$$

siehe Beispiel 9.2 (a),

b) in Kugelkoordinaten

$$\nabla f(x) = \frac{\partial \tilde{f}(r, \theta, \varphi)}{\partial r} e_r(r, \theta, \varphi) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tilde{f}(r, \theta, \varphi)}{\partial \theta} e_\theta(r, \theta, \varphi) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tilde{f}(r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi} e_\varphi(r, \theta, \varphi), \quad (9.5)$$

siehe Beispiel 9.2 (b).

Beispiel 9.4 Insbesondere ist für eine zentrale Funktion $f(x) = h(|x|)$ in \mathbb{R}^n

$$\nabla f(x) = \frac{\partial h(r)}{\partial r} e_r(u(x)) = \frac{\partial h(r)}{\partial r} \hat{x},$$

wobei $\hat{x} = \frac{x}{|x|}$ der Richtungseinheitsvektor ist.

9.1.2 Die Divergenz

Wir betrachten ein Vektorfeld, das in der Form

$$F(x(u)) = F^1(u) e_1(u) + \dots + F^n(u) e_n(u)$$

gegeben ist. Wir wollen die Divergenz

$$\operatorname{div} F(x) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial F^j}{\partial x^j}$$

bzgl. x an der Stelle $x = T(u)$ durch die partiellen Ableitungen $\partial F^k / \partial u^j$ bzgl. der Variablen u auszudrücken. Wir betrachten erst den Sonderfall $F = \varphi(u) e_n(u)$. Wir wählen ein $u_0 \in U$. Sei

$$Q_u = Q_u(\varepsilon) = \{u \in \mathbb{R}^n : u^j \in [u_0^j, u_0^j + \varepsilon], j = 1, \dots, n\},$$

der Koordinatenquader in \mathbb{R}_u^n , wobei $\varepsilon > 0$ klein genug ist um $Q_u(\varepsilon) \subset U$ zu genügen. Ferner bezeichnen wir $Q_x = T(Q_u(\varepsilon))$. Nach dem Integralsatz von Gauß gilt

$$\int_{Q_x} \operatorname{div} F(x) \, dx = \int_{\partial Q_x} \langle F(x), n(x) \rangle \, d\sigma(x). \quad (9.6)$$

Für $\varepsilon \rightarrow 0$ gilt

$$\int_{Q_x(\varepsilon)} \operatorname{div} F(x) \, dx = \operatorname{Vol}(Q_x(\varepsilon)) \operatorname{div} F(x_0) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) = \varepsilon^n J(u_0) \operatorname{div} F(x_0) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)), \quad (9.7)$$

wobei

$$J(u_0) = \det T'(u_0) = g_1(u_0) \cdot \dots \cdot g_n(u_0)$$

die Jakobideterminante ist.

Der Rand ∂Q_x des "gekrümmten Quader" Q_x besteht aus $2n$ Flächenstücke

$$\begin{aligned} \partial Q_x &= \cup_{j=1}^n (Q_-^j \cup Q_+^j), \\ Q_-^j &= T(Q_u(\varepsilon) \cap \{u^j = 0\}) \text{ bzw. } Q_+^j = T(Q_u(\varepsilon) \cap \{u^j = \varepsilon\}) \end{aligned}$$

jeweils von Dimension $n - 1$. In unserem Sonderfall ist F zu $e_n(u)$ kollinear, also gilt

$$\langle \varphi(u) e_n(u), n(x) \rangle = \begin{cases} 0, & \text{auf } Q_{\pm}^j \text{ mit } j \neq n, \\ \pm \varphi(u) & \text{auf } Q_{\pm}^n. \end{cases}$$

Das Flächenintegral in (9.6) kann man nun wie folgt ausrechnen:

$$\begin{aligned}
 R &= \int_{\partial Q_x} \langle F(x), n(x) \rangle d\sigma(x) = \left(\int_{Q_+^n} - \int_{Q_-^n} \right) \varphi(u) d\sigma(x) \\
 &= \left(\int_{Q_{u(\varepsilon) \cap \{u^j = \varepsilon\}} - \int_{Q_{u(\varepsilon) \cap \{u^j = 0\}}} \right) \varphi g_1 \cdot \dots \cdot g_{n-1} du^1 \dots du^{n-1} \\
 &= \int_{[0, \varepsilon]^{n-1}} \left[\left(\varphi \frac{J}{g_n} \right) \left(u_0 + \begin{pmatrix} u^1 \\ \dots \\ \varepsilon \end{pmatrix} \right) - \left(\varphi \frac{J}{g_n} \right) \left(u_0 + \begin{pmatrix} u^1 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \right) \right] du^1 \dots du^{n-1} \\
 &= \int_{[0, \varepsilon]^{n-1}} \varepsilon \frac{\partial \left(\varphi \frac{J}{g_n} \right)}{\partial u^n} (u_0) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)) du^1 \dots du^{n-1} = \varepsilon^{n-1} \cdot \varepsilon \frac{\partial \left(\varphi \frac{J}{g_n} \right)}{\partial u^n} (u_0) (1 + \mathcal{O}(\varepsilon)).
 \end{aligned}$$

Vergleich dieser Formel und (9.7) liefert:

$$J \operatorname{div}(\varphi e_n) = \frac{\partial}{\partial u^n} \left(\varphi \frac{J}{g_n} \right).$$

Für den Allgemeinfall gilt folglich

$$J \operatorname{div} \left(\sum_{j=1}^n F^j e_j \right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{J}{g_j} F^j \right),$$

oder, äquivalent

$$\operatorname{div} \left(\sum_{j=1}^n F^j e_j \right) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{J}{g_j} F^j \right). \tag{9.8}$$

Beispiel 9.5 Insbesondere gilt

a) in Polarkoordinaten:

$$\operatorname{div} F = \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r F^r(r, \varphi)) + \frac{\partial}{\partial \varphi} F^\varphi(r, \varphi) \right); \tag{9.9}$$

b) und in Kugelkoordinaten:

$$\operatorname{div} F = \frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta F^r(r, \theta, \varphi)) + \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta F^\theta(r, \theta, \varphi)) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (r F^\varphi(r, \theta, \varphi)) \right). \tag{9.10}$$

9.1.3 Die Rotation

Vollständigkeitshalber betrachten wir hier den Rotationsoperator in \mathbb{R}^3 . Unter den gleichen Voraussetzungen wie im Divergenzfall wollen wir die Rotation $\operatorname{rot} F(x)$ bzgl. x an

der Stelle $x = T(u)$ durch die partiellen Ableitungen $\partial F^k / \partial u^j$ bzgl. der Variablen u ausdrücken.

Dafür gehen wir zunächst wie oben vor:

$$\operatorname{rot} F = \sum_{j=1}^3 \operatorname{rot} (F^j e_j) = \sum_{j=1}^3 \operatorname{rot} (g_j F^j \nabla u^j).$$

Dann wenden wir die Relation

$$\operatorname{rot} (gG) = g \operatorname{rot} G + \nabla g \times G$$

auf $g = g_j F^j$ und $G = \nabla u^j$ an, und erhalten:

$$\operatorname{rot} (g_j F^j \nabla u^j) = g_j F^j \operatorname{rot} \nabla u^j + \nabla (g_j F^j) \times \nabla u^j = \nabla (g_j F^j) \times \nabla u^j.$$

Daraus folgt:

$$\operatorname{rot} F(x) = \sum_{j=1}^3 \nabla (g_j F^j) \times \nabla u^j = \sum_{i,j=1}^3 \frac{1}{g_i(u) g_j(u)} \frac{\partial}{\partial u^j} [g_j(u) F^j(u)] (e_j \times e_i).$$

Tatsächlich besteht die Summe aus 6 Gliedern, da $e_i \times e_i = 0$. Durch formale Entwicklung der folgenden Determinante erkennt man die übliche Form dieser Formel:

$$\operatorname{rot} F(x) = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \det \begin{pmatrix} g_1 e_1 & g_2 e_2 & g_3 e_3 \\ \partial/\partial u^1 & \partial/\partial u^2 & \partial/\partial u^3 \\ g_1 F^1 & g_2 F^2 & g_3 F^3 \end{pmatrix}.$$

Die Formeln in speziellen Koordinatensystemen findet man in Formelsammlungen.

9.1.4 Der Laplaceoperator

Wir berechnen den Laplaceoperator in Polar- bzw. sphärischen Koordinaten. Einsetzen von (9.8) und (9.3) in

$$\Delta u = \operatorname{div} \nabla u$$

ergibt

$$\Delta u = \sum_{j=1}^n \operatorname{div} \left(\frac{1}{g_j} \frac{\partial \tilde{f}(u)}{\partial u^j} e_j \right) = \frac{1}{J} \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial u^j} \left(\frac{J}{g_j} \frac{\partial \tilde{f}(u)}{\partial u^j} \right) \quad (9.11)$$

mit $J = g_1 \cdot \dots \cdot g_n$.

a) In Polarkoordinaten ist $g_r = 1$, $g_\varphi = r$. Man hat

$$\Delta u(r, \varphi) = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial \varphi^2}. \quad (9.12)$$

b) In sphärischen Koordinaten ist $g_r = 1$, $g_\theta = r$, $g_\varphi = r \sin \theta$. Das ergibt

$$\Delta u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} \right). \quad (9.13)$$

9.2 Die Punktquelle

Aufgabe 9.6 Zeigen Sie: die Funktion

$$u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|}, \quad x \neq 0,$$

erfüllt die Helmholtzgleichung

$$\Delta u + k^2 u = 0$$

in $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Lösung: Wir setzen u in (9.13) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} \Delta u + k^2 u &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) \right) + k^2 u = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \left(\frac{ik e^{ikr}}{r} - \frac{e^{ikr}}{r^2} \right) \right) + k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (ikr e^{ikr} - e^{ikr}) + k^2 \frac{e^{ikr}}{r} \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (ike^{ikr} - k^2 r e^{ikr} - ik e^{ikr}) + k^2 \frac{e^{ikr}}{r} = 0. \end{aligned}$$

Definition 9.7 Die Funktion

$$\Phi(x, y) = \frac{\exp(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|} \quad (9.14)$$

heißt **Fundamentallösung**, oder **Grundlösung**, oder **freie Greensche Funktion** der Helmholtzgleichung in \mathbb{R}^3 .

Satz 9.8 Es gilt

$$\Phi(x, y) = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} e^{-ik\hat{x}\cdot y} + \mathcal{O}(|x|^{-2}), \quad x \rightarrow \infty, \quad (9.15)$$

gleichmäßig bezüglich der Richtung $\hat{x} = x/|x| \in S^2$ und bezüglich y auf jeder kompakten Menge.

Beweis: Es ist

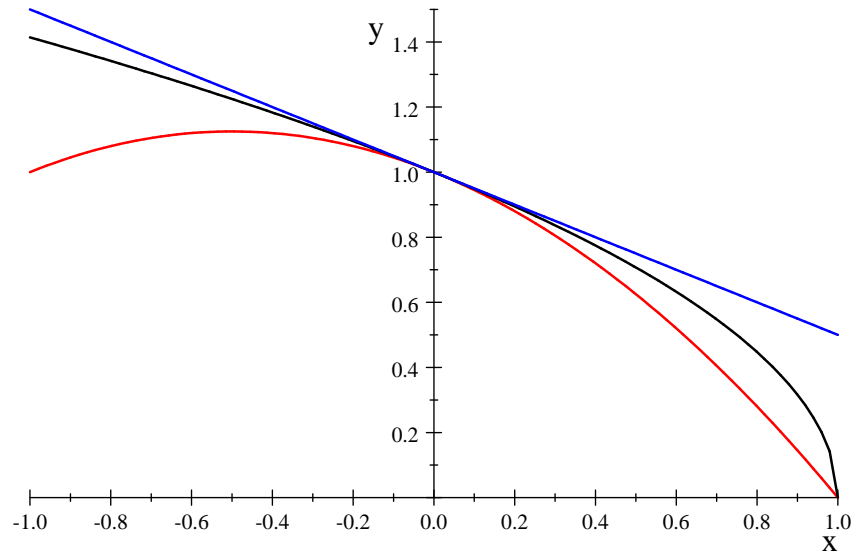
$$|x-y| = (|x|^2 - 2x \cdot y + |y|^2)^{1/2} = |x| \left(1 - \frac{2\hat{x} \cdot y}{|x|} + \frac{|y|^2}{|x|^2} \right)^{1/2}.$$

Wir bezeichnen

$$z = \frac{2\hat{x} \cdot y}{|x|} - \frac{|y|^2}{|x|^2}. \quad (9.16)$$

Für $|x| = c|y|$ mit einem $c > 4$ gilt

$$|z| \leq 2|\hat{x} \cdot \hat{y}| \frac{|y|}{|x|} + \frac{|y|^2}{|x|^2} \leq \frac{2}{c} + \frac{1}{c^2} \leq \frac{2}{c} + \frac{1}{4c} = \frac{9}{4c} \leq \frac{9}{16} < 1. \quad (9.17)$$



Für $z \in (-1, 1)$ gilt

$$0 \leq 1 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^2 \leq (1 - z)^{1/2} \leq 1 - \frac{1}{2}z, \quad (9.18)$$

siehe Bild.

Mit (9.18) und (9.17) folgt daraus

$$0 \leq \left(1 - \frac{1}{2}z\right) - (1 - z)^{1/2} \leq \frac{1}{2}z^2 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{9}{4c}\right)^2 = \frac{81}{64} \frac{1}{c^2},$$

oder

$$1 - \frac{1}{2}z - \frac{81}{64} \frac{1}{c^2} \leq (1 - z)^{1/2} \leq 1 - \frac{1}{2}z$$

Einsetzen von (9.16) und (9.17) ergibt

$$1 - \frac{\hat{x} \cdot y}{|x|} - \frac{49}{64} \frac{|y|^2}{|x|^2} \leq \left(1 - \frac{2\hat{x} \cdot y}{|x|} + \frac{|y|^2}{|x|^2}\right)^{1/2} \leq 1 - \frac{\hat{x} \cdot y}{|x|} + \frac{|y|^2}{2|x|^2}, \quad (9.19)$$

oder

$$\delta = \left| |x - y| - (|x| - \hat{x} \cdot y) \right| < \frac{|y|^2}{|x|}.$$

Daraus folgt insbesondere

$$\exp(ik|x - y|) = (1 + \delta_1) \exp[ik(|x| - \hat{x} \cdot y)]$$

mit

$$|\delta_1| = |e^{ik\delta} - 1| < |k\delta| < |k| \frac{|y|^2}{|x|}. \quad (9.20)$$

Ferner hat man

$$\frac{1}{|x-y|} - \frac{1}{|x|} = \frac{1}{|x|} (1-z)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{|x|} = \frac{1}{|x|} \left((1-z)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right) = \frac{1}{|x|} \delta_2.$$

Aus (9.17) wissen wir, dass $|z| \leq \frac{9}{4c} \leq \frac{9}{16}$ ist. Auf diesem Intervall gilt

$$\delta_2 = \left| (1-z)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right| < |z| < \frac{9|y|}{4|x|}. \quad (9.21)$$

Man hat

$$\Phi(x, y) = \frac{\exp(ik|x-y|)}{4\pi|x-y|} = (1+\delta_1)(1+\delta_2) \frac{\exp[ik(|x| - \hat{x} \cdot y)]}{4\pi|x|}.$$

Daraus folgt mit (9.20) und (9.21) und unter der Voraussetzung $|x| \geq 4|y|$:

$$\begin{aligned} \left| \Phi(x, y) - \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} e^{-ik\hat{x} \cdot y} \right| &= \left| \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} e^{-ik\hat{x} \cdot y} \right| |\delta_1 + \delta_2 + \delta_1\delta_2| \\ &\leq \frac{1}{4\pi|x|} \left(\frac{|y|^2|k|}{|x|} + \frac{9|y|}{4|x|} + \frac{9|y|^3|k|}{4|x|^2} \right) \\ &\leq \frac{1}{4\pi|x|} \left(\frac{|y|^2|k|}{|x|} + \frac{9|y|}{4|x|} + \frac{9|y|^2|k|}{16|x|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi|x|^2} \left(\frac{25}{16}|y|^2|k| + \frac{9}{4}|y| \right), \end{aligned}$$

was die gleichmäßige Abschätzung (9.15) beweist. □

10 Das Volumenpotential

Sei $D \subset \mathbb{R}^3$ beschränkt und $f \in B(D)$. Wir definieren das **Volumenpotential** durch

$$u(x) = \int_D f(y) \Phi(x, y) dy = \frac{1}{4\pi} \int_D f(y) \frac{\exp(ik|x-y|)}{|x-y|} dy, \quad x \in \mathbb{R}^3. \quad (10.1)$$

Die erste berechnete Frage ist, ob das uneigentliche Integral (10.1) konvergiert.

10.1 Das Newton-Potential

Für $k = 0$ heißt u das **Newton-Potential**. Ist f Dichte, so wird durch

$$u_N(x) = \frac{1}{4\pi} \int_D \frac{f(y)}{|x-y|} dy, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad (10.2)$$

das Gravitationspotential gegeben (streng genommen, man muss noch die Konstante anpassen). Genauso beschreibt (10.2) das Coulombsche Potential einer Ladungsverteilung mit der Ladungsdichte f .

Aufgabe 10.1 Gegeben sei die Dichte

$$f(y) = \begin{cases} \rho, & a \leq |y| \leq b, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

in \mathbb{R}^3 . Berechnen Sie das Newton-Potential u_N .

Lösung: Es gilt

$$4\pi u_N(x) = \int_{a < |y| < b} \frac{\rho dy}{|x-y|}.$$

Wir bezeichnen $t = |x|$ und wählen sphärische Koordinaten (r, φ, θ) mit $r \in \mathbb{R}_+$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $\theta \in [0, \pi]$ so, dass der Punkt x die Koordinaten $r = t$, $\varphi = 0$, $\theta = 0$ bekommt (die dritte Koordinatenachse hat die Richtung x). In kartesischen Koordinaten gilt also

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \sin \theta \\ r \sin \varphi \sin \theta \\ r \cos \theta \end{pmatrix},$$

wobei

$$r = |y| \quad \text{und} \quad \theta = \angle(x, y)$$

ist. Es ist

$$|x-y| = (t^2 + r^2 - 2tr \cos \theta)^{1/2}.$$

Man hat

$$\begin{aligned}
 4\pi u_N(x) &= \int_a^b \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho (t^2 + r^2 - 2tr \cos \theta)^{-1/2} \sin \theta r^2 d\varphi d\theta dr \\
 &= 2\pi\rho \int_a^b \int_0^\pi (t^2 + r^2 - 2tr \cos \theta)^{-1/2} \sin \theta r^2 d\theta dr \\
 &= 2\pi\rho \int_a^b \left(\int_{-1}^1 (t^2 + r^2 + 2tr l)^{-1/2} dl \right) r^2 dr \text{ (Substitution } l = \cos \theta) \\
 &= 2\pi\rho \int_a^b \frac{1}{tr} (t^2 + r^2 + 2tr l)^{1/2} \Big|_{l=-1}^{l=+1} r^2 dr \\
 &= 2\pi\rho \int_a^b \frac{1}{tr} [|t+r| - |t-r|] r^2 dr = 2\pi \int_a^b \frac{r}{t} [t+r - |t-r|] dr.
 \end{aligned}$$

Wir betrachten jetzt drei Fälle:

1. $t \geq b$, also $|t-r| = t-r$:

$$4\pi u_N(x) = 2\pi\rho \int_a^b \frac{r}{t} [t+r - t+r] dr = \frac{4\pi\rho}{t} \int_a^b r^2 dr = \frac{4\pi\rho}{3} [b^3 - a^3] \frac{1}{t} = \frac{M}{|x|},$$

wobei M die Gesamtmasse der Kugelschale ist.

2. $a \leq t \leq b$, also

$$|t-r| = \begin{cases} t-r, & \text{für } r \in [a, t], \\ r-t, & \text{für } r \in [t, b]. \end{cases}$$

Daher ist

$$\begin{aligned}
 4\pi u_N(x) &= 2\pi\rho \int_a^t \frac{r}{t} [t+r - t+r] dr + 2\pi\rho \int_t^b \frac{r}{t} [t+r + t-r] dr \\
 &= \frac{4\pi\rho}{t} \int_a^t r^2 dr + 2\pi\rho \int_t^b 2r dr = \frac{4\pi\rho}{3} [t^3 - a^3] \frac{1}{t} + 2\pi\rho [b^2 - t^2] \\
 &= \frac{4\pi\rho}{3} [|x|^3 - a^3] \frac{1}{|x|} + 2\pi\rho [b^2 - |x|^2].
 \end{aligned}$$

3. $t \leq a$ oder $|t-r| = r-t$:

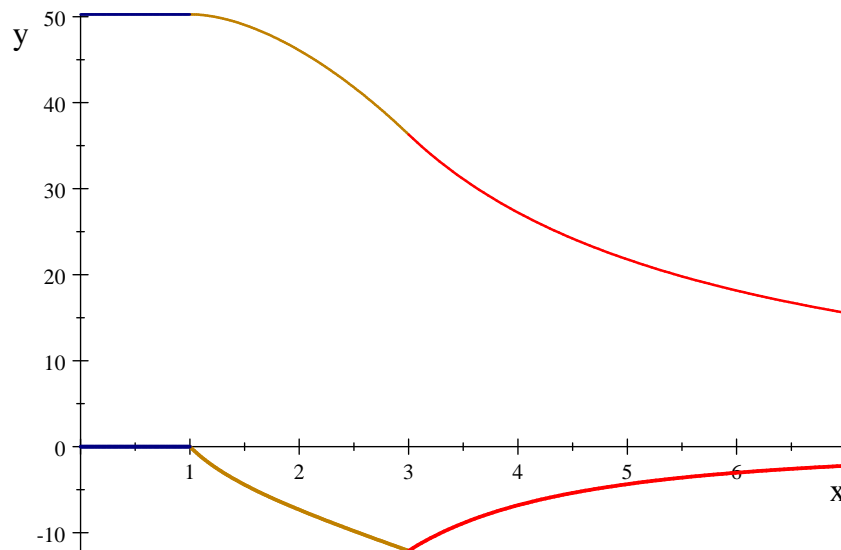
$$4\pi u_N(x) = 2\pi\rho \int_a^b \frac{r}{t} [t+r + t-r] dr = 2\pi\rho \int_a^b 2r dr = 2\pi\rho [b^2 - a^2].$$

Das Newtonpotential u_N der homogenen Kugelschale wird also durch

$$u_N(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\rho [b^2 - a^2], & \text{für } |x| \leq a, \\ \frac{\rho}{3} [|x|^3 - a^3] \frac{1}{|x|} + \frac{\rho}{2} [b^2 - |x|^2], & \text{für } a \leq |x| \leq b, \\ \frac{M}{4\pi|x|} = \frac{\rho}{3} [b^3 - a^3] \frac{1}{|x|}, & \text{für } |x| \geq b, \end{cases} \quad (10.3)$$

gegeben. Insbesondere ist das Potential innerhalb der Kugelschale konstant. Daher ist dort die Gravitationskraft $F = \nabla u_N = 0$ (Schwerelosigkeit). \square

Das Potential (10.3) ist stetig in ganz \mathbb{R}^3 und hängt nur von der Länge $|x|$ ab. Äquipotentialflächen $u_N = c$ sind für $c < \frac{1}{2}\rho [b^2 - a^2]$ stets konzentrische Sphären. Explizite Berechnungen zeigen, dass u_N stetig differenzierbar ist. Die zweite Ableitung existiert aber nicht in den Punkten, wo f Sprünge hat, siehe Bild (hier ist $a = 1, b = 3, \rho = 4\pi$).



Potential der homogenen Kugelschale und dessen Ableitung

10.2 Konvergenz des Volumenpotentials (10.1)

Das Volumenpotential u und das Newton-Potential u_N haben die Differenz

$$u - u_N = \frac{1}{4\pi} f * \delta \text{ mit } \delta(x) = \frac{e^{ik|x|} - 1}{|x|}.$$

Da die Funktion δ beschränkt ist auf ganz \mathbb{R}^3 , ist das Faltungsprodukt $f * \delta$ wohldefiniert. Daher konvergieren bzw. divergieren beide Integrale (10.1) und (10.2) gleichzeitig. Das obige Beispiel lässt vermuten, dass für $f \in B(D)$ gilt $u \in C^1(\mathbb{R}^3)$ sowie $u_N \in C^1(\mathbb{R}^3)$, aber i.a. nicht $u \in C^2(\mathbb{R}^3)$.

Satz 10.2 Seien $D \subset \mathbb{R}^3$, $f \in B(D)$ und $k \geq 0$. Dann gilt

- a) Das Volumenpotential u ist wohldefiniert (als uneigentliches Integral) für alle $x \in \mathbb{R}^3$,
 b) u ist stetig differenzierbar in \mathbb{R}^3 und es gilt

$$\begin{aligned} \nabla u(x) &= \int_D f(y) \nabla_x \Phi(x, y) dy \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_D f(y) \frac{\exp(ik|x-y|)}{|x-y|} \left(\frac{ik}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y|^2} \right) (x-y) dy, \quad x \in \mathbb{R}^3. \end{aligned} \quad (10.4)$$

Beweis: a) Wir bezeichnen $d = \text{diam}(D)$. Es ist

$$\begin{aligned} \int_D |f(y)| |\Phi(x, y)| dy &\leq \frac{1}{4\pi} \|f\|_\infty \int_{|x-y| \leq d} \frac{dy}{|x-y|} = \frac{1}{4\pi} \|f\|_\infty \int_{|z| \leq d} \frac{dz}{|z|} \\ &= \frac{1}{4\pi} \|f\|_\infty 4\pi \int_0^d \frac{r^2}{r} dr = \|f\|_\infty \frac{d^2}{2} < \infty. \end{aligned}$$

Da (10.1) eine Majorante hat, konvergiert das Integral.

b) Erst einmal bemerken wir, dass das Integral (10.4) absolut konvergiert wegen

$$\begin{aligned} &\int_D |f(y)| \left| \frac{\exp(ik|x-y|)}{|x-y|} \left(\frac{ik}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y|^2} \right) (x-y) \right| dy \\ &= \int_D |f(y)| \left| \frac{ik}{|x-y|} - \frac{1}{|x-y|^2} \right| dy \leq \|f\|_\infty \int_{|z| \leq d} \left(\frac{|k|}{|z|} + \frac{1}{z^2} \right) dz \\ &= 4\pi \|f\|_\infty \int_0^d \left(\frac{|k|}{r} + \frac{1}{r^2} \right) r^2 dr = 4\pi \|f\|_\infty \left(\frac{|k|d^2}{2} + d \right) < \infty. \end{aligned}$$

Wir approximieren nun die Funktion $|x-y|^{-1}$, die bei $x=y$ singulär ist, durch eine Folge C^1 -glatter Hilfsfunktionen $h_\delta(|x-y|)$, $\delta \rightarrow 0$, so dass die Gradientenfolge $\nabla_x h_\delta(|x-y|)$ gegen den Gradienten $\nabla_x |x-y|^{-1}$ konvergiert. Wir suchen h_δ , $\delta > 0$ in der Form

$$h_\delta(t) = \begin{cases} t^{-1} & \text{für } t > \delta, \\ a - bt^2 & \text{für } t \in (0, \delta], \end{cases}$$

und entsprechend

$$\frac{dh_\delta(t)}{dt} = \begin{cases} -t^{-2} & \text{für } t > \delta, \\ -2bt & \text{für } t \in (0, \delta]. \end{cases}$$

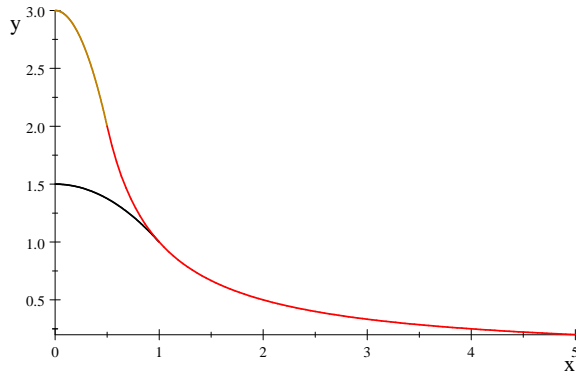
Die Bedingungen

$$\lim_{t \rightarrow \delta-0} h_\delta(t) = \lim_{t \rightarrow \delta+0} h_\delta(t) \quad \text{sowie} \quad \lim_{t \rightarrow \delta-0} h'_\delta(t) = \lim_{t \rightarrow \delta+0} h'_\delta(t)$$

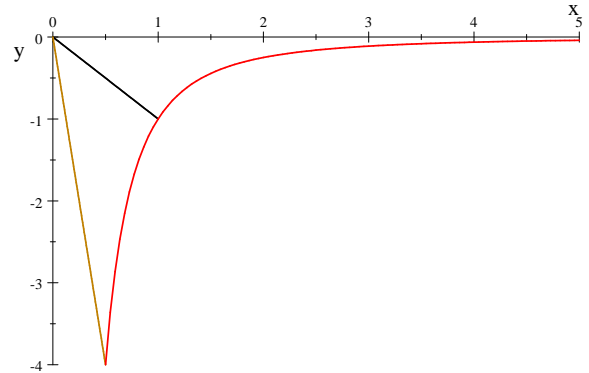
führen auf

$$a - b\delta^2 = \delta^{-1} \quad \text{und} \quad -2b\delta = -\delta^{-2}.$$

Das ergibt $b = \frac{1}{2}\delta^{-3}$ und $a = \frac{3}{2}\delta^{-1}$.



h_δ für $\delta = 1$ und $\delta = 1/2$.



Die Ableitungen von h_δ

Wir definieren auch $h_0(t) = t^{-1}$. Ferner sei

$$u_\delta(x) = \frac{1}{4\pi} \int_D f(y) e^{ik|x-y|} h_\delta(|x-y|) dy \text{ für } x \in \mathbb{R}^3, \delta \geq 0$$

und

$$F_\delta(x) = \nabla u_\delta(x) = \frac{1}{4\pi} \int_D f(y) \nabla_x [e^{ik|x-y|} h_\delta(|x-y|)] dy \text{ für } x \in \mathbb{R}^3, \delta > 0,$$

$$F_0(x) = \frac{1}{4\pi} \int_D \nabla_x \frac{e^{ik|x-y|}}{|x-y|} f(y) dy \text{ für } x \in \mathbb{R}^3.$$

Es gelten die Abschätzungen:

$$|h_0(t) - h_\delta(t)| = h_0(t) - h_\delta(t) \leq \begin{cases} 0 & \text{für } t > \delta, \\ t^{-1} & \text{für } t \in (0, \delta]. \end{cases}$$

und

$$|h'_0(t) - h'_\delta(t)| = \begin{cases} 0 & \text{für } t > \delta, \\ t^{-2} - \delta^{-3}t & \text{für } t \in (0, \delta] \end{cases} \leq \begin{cases} 0 & \text{für } t > \delta, \\ t^{-2} & \text{für } t \in (0, \delta] \end{cases}.$$

Folglich gilt

$$\begin{aligned} 4\pi |u_\delta(x) - u_0(x)| &\leq \int_D |h_\delta(|x-y|) - h_0(|x-y|)| |f(y)| dy \\ &\leq \|f\|_\infty \int_{D \cap B_\delta(x)} \frac{dy}{|x-y|}, \end{aligned}$$

wobei $B_\delta(x)$ die Kugel mit Radius δ um den Punkt x bezeichnet. Es ist also

$$4\pi |u_\delta(x) - u_0(x)| \leq \|f\|_\infty \int_{B_\delta(x)} \frac{dy}{|x-y|} \stackrel{y-x=z}{=} \|f\|_\infty \int_{|z| \leq \delta} \frac{dz}{|z|} = \|f\|_\infty \cdot 2\pi\delta^2.$$

Also konvergiert u_δ gleichmäßig gegen u_0 .
Ferner gilt

$$\begin{aligned}\nabla_x [e^{ik|x-y|}h_\delta(|x-y|)] &= \frac{\partial}{\partial r} [e^{ikr}h_\delta(r)] \Big|_{r=|x-y|} \nabla |x-y| \\ &= [ikh_\delta(r) + h'_\delta] e^{ikr} \Big|_{r=|x-y|} \frac{x-y}{|x-y|}\end{aligned}$$

für alle $\delta \geq 0$. Daher ist

$$\begin{aligned}4\pi |F_\delta(x) - F_0(x)| &\leq \int_D |k| |h_\delta(r) - h_0(r)| + |h'_\delta(r) - h'_0(r)| \Big|_{r=|x-y|} |f(y)| dy \\ &= \|f\|_\infty \int_{D \cap B_\delta(x)} \left(\frac{|k|}{|x-y|} + \frac{1}{|x-y|^2} \right) dy.\end{aligned}$$

Man hat also

$$\begin{aligned}4\pi |F_\delta(x) - F_0(x)| &\leq \|f\|_\infty \int_{|z| \leq \delta} \left(\frac{|k|}{|z|} + \frac{1}{z^2} \right) dz = 4\pi \|f\|_\infty \int_0^\delta \left(\frac{|k|}{r} + \frac{1}{r^2} \right) r^2 dr \\ &= 4\pi \|f\|_\infty \left(\frac{|k| \delta^2}{2} + \delta \right).\end{aligned}$$

Also konvergiert $F_\delta = \nabla u_\delta$ ebenfalls gleichmäßig gegen F_0 . Aus der Konvergenz

$$u_\delta \rightrightarrows u_0 \quad \text{und} \quad \nabla u_\delta = F_\delta \rightrightarrows F_0$$

folgt bekanntlich $\nabla u_0 = F_0$. □

10.3 Lösung der inhomogenen Helmholtz-Gleichung mit Volumenpotentialansatz

Stellt man keine weiteren Anforderungen auf f außer Beschränktheit, so kann man i.A. nicht erwarten, dass das Volumenpotential u zweimal differenzierbar ist, siehe Beispiel mit der homogenen Kugelschale. Im Falle, wenn f Hölder-stetig ist, gilt die folgende Behauptung.

Satz 10.3 Sei $f \in C^{0,\alpha}$, Dann ist $u \in C^{2,\alpha}$, siehe (10.1), und es gilt

$$(\Delta + k^2)u = f. \tag{10.5}$$

Beweis: Wir werden (10.5) für das Newtonpotential $u = u_N$ (10.2) beweisen. Der Allgemeinfall $k \neq 0$ geht analog. Die Vorgehensweise ist, wie im vorherigen Satz, durch eine passende Folge das Potential u , den Gradienten ∇u und den Laplaceoperator Δu zu approximieren. Wir setzen

$$h_\delta(t) = \begin{cases} -\frac{5}{4\delta^3}t^2 + \frac{3t^4}{8\delta^5} + \frac{15}{8\delta}, & 0 < t \leq \delta, \\ t^{-1}, & t > \delta, \end{cases}$$

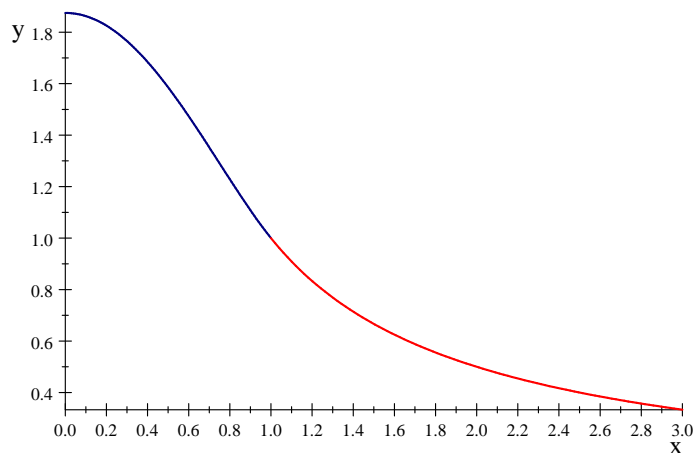
Dabei gilt

$$h'_\delta(t) = \begin{cases} -\frac{5}{2\delta^3}t + \frac{3t^3}{2\delta^5}, & 0 < t \leq \delta, \\ -t^{-2}, & t > \delta, \end{cases}$$

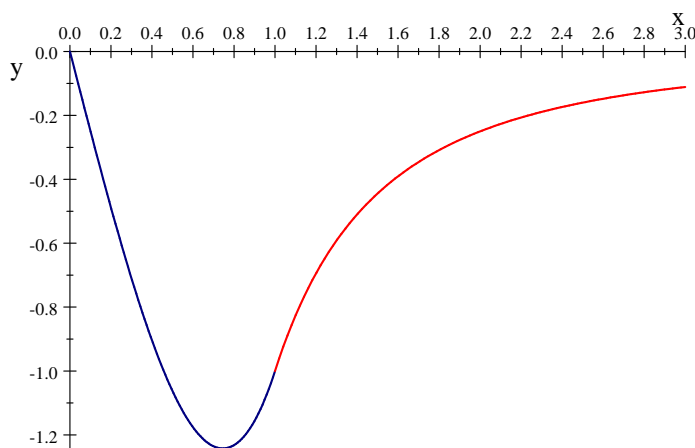
und

$$h''_\delta(t) = \begin{cases} -\frac{5}{2\delta^3} + \frac{9t^2}{2\delta^5}, & 0 < t \leq \delta, \\ 2t^{-3}, & t > \delta, \end{cases}.$$

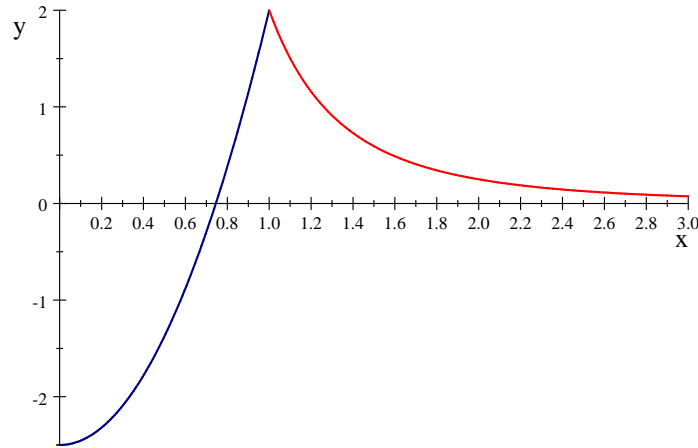
Es ist $h_\delta \in C^2(\mathbb{R})$, siehe Bilder.



h_δ für $\delta = 1$



h'_δ für $\delta = 1$



h''_δ für $\delta = 1$

Analog zum Beweis vom Satz 10.2 hat man

$$\begin{aligned} u_\delta &\rightrightarrows u \text{ für } \delta \rightarrow 0, \\ \nabla u_\delta &\rightrightarrows \nabla u \text{ für } \delta \rightarrow 0 \end{aligned}$$

für u_δ gegeben durch

$$u_\delta(x) = \frac{1}{4\pi} \int_D f(y) h_\delta(|x-y|) dy \text{ für } x \in \mathbb{R}^3, \delta \geq 0.$$

Bei der Berechnung der zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ bzw. der Laplaceoperator versagt aber die Technik, die wir vom Satz 10.2 kennen, da die zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_j}$ eine nicht integrierbare Singularität $|x-y|^{-3}$ haben. Um die Differenz

$$\frac{1}{4\pi} \int_D f(y) \left(\Delta h_\delta(|x-y|) - \underbrace{\Delta h_0(|x-y|)}_{=0} \right) dy$$

abschätzen zu können, müssen wir die Hölder-Stetigkeit der Funktion f einsetzen. Es ist

$$\begin{aligned} \frac{1}{4\pi} \int_D f(y) \Delta h_\delta(|x-y|) dy &= \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_D (f(y) - f(x)) \Delta h_\delta(|x-y|) dy}_{=I_1} \\ &+ f(x) \underbrace{\frac{1}{4\pi} \int_D \Delta h_\delta(|x-y|) dy}_{=I_0}. \end{aligned}$$

Das Integral I_0 kann man mit (9.13)

$$\begin{aligned} \Delta h_\delta(|x-y|) &= \frac{1}{t^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(t^2 \frac{\partial h_\delta}{\partial t} \right) \Big|_{t=|x-y|} = \frac{1}{t^2} \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{5t^3}{2\delta^3} + \frac{3t^5}{2\delta^5} \right) \Big|_{t=|x-y|} \\ &= -\frac{15}{2\delta^3} \left(1 - \frac{|x-y|^2}{\delta^2} \right) \end{aligned}$$

explizit ausrechnen:

$$I_0 = -\frac{15}{2\delta^3} \frac{4\pi}{4\pi} \int_0^\delta \left(1 - \frac{r^2}{\delta^2}\right) r^2 dr = -\frac{15}{2\delta^3} \left(\frac{\delta^3}{3} - \frac{\delta^5}{5\delta^2}\right) = -\frac{15}{2} \cdot \frac{2}{15} = -1.$$

Für I_1 gilt die Hölder-Abschätzung

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{C}{\delta^3} \int_{|x-y|<\delta} |x-y|^\alpha \left|1 - \frac{|x-y|^2}{\delta^2}\right| dy = \frac{4\pi C}{\delta^3} \int_0^\delta \left|r^\alpha - \frac{r^{2+\alpha}}{\delta^2}\right| r^2 dr \\ &\leq \frac{4\pi C}{\delta^3} \left(\frac{\delta^{3+\alpha}}{3+\alpha} + \frac{\delta^{5+\alpha}}{\delta^2(5+\alpha)}\right) \leq C_1 \delta^\alpha. \end{aligned}$$

Daher ist

$$\Delta u_\delta \rightrightarrows f(x) I_0 = -f(x_0). \quad (10.6)$$

Analog zeigt man die Existenz aller Ableitungen $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$. Damit folgt aus (10.6) die Gleichung $\Delta u + f = 0$. \square