Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. T. Arens
Dipl.-Math. S. Heumann

Karlsruhe, den 25.10.2010

Inverse Probleme – 1.Übungsblatt

Definition (Relative Kompaktheit)**.** *Eine Teilmenge $M \subseteq E$ eines metrischen Raumes E heißt* RELATIV KOMPAKT*, wenn jede Folge aus M eine konvergente Teilfolge besitzt.*

Bemerkung. *Der Grenzwert einer solchen konvergenten Teilfolge braucht also nicht in M zu liegen.*

Aufgabe 1: Seien X, Y zwei normierte Räume. Zeigen Sie die folgende Äquivalenz:
Ein linearer Operator $K \colon X \to Y$ ist genau dann kompakt, wenn er beschränkte Mengen auf relativ kompakte Mengen abbildet.

Aufgabe 2: Seien X ein normierter Raum, Y ein Banachraum und $(A_n) \subseteq \mathcal{K}(X, Y)$ eine Folge kompakter Operatoren. Ferner existiere ein Operator $A \in \mathcal{L}(X, Y)$ mit der Eigenschaft $\|A_n - A\| \to 0$ für $n \to \infty$. Zeigen Sie anhand folgender Schritte, dass A kompakt ist:

(a) Ist (x_m) eine beschränkte Folge aus X, so existiert eine Teilfolge $(x_{m(k)})_k$, so dass $(A_n x_{m(k)})_k$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ konvergiert.

(b) Für die Teilfolge aus (a) ist $(Ax_{m(k)})_k$ eine Cauchy-Folge.

(c) $A \in \mathcal{K}(X, Y)$.

Definition (Sobolevräume)**.** *Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Der* SOBOLEVRAUM

$$H^p(a,b) := \left\{ x \in C^{p-1}[a,b] \ : \ x^{(p-1)}(t) = \alpha + \int_a^t \psi(s)\,ds,\ \alpha \in \mathbb{R},\ \psi \in L^2(a,b) \right\}$$

enthält $(p-1)$-mal stetig differenzierbare Funktionen x, für die die p-te Ableitung $x^{(p)}$ im schwachen Sinne existiert.

Aufgabe 3: Gegeben sei der Raum $X_1 := \{x \in H^1(0,1) \ : \ x(1) = 0\}$. Betrachten Sie den linearen Operator $K \colon L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ definiert durch

$$(Kx)(t) \ := \ \int_0^t x(s)\,ds\,, \qquad t \in (0,1).$$

(a) Bestimmen Sie den zu K adjungierten Operator K^*, d.h. K^* hat die Eigenschaft:

$$(Kx, y)_{L^2} \ = \ (x, K^* y)_{L^2}$$

für alle $x, y \in L^2(0,1)$.

(b) Zeigen Sie: $K^*\big(L^2(0,1)\big) = X_1$.

(c) Weisen Sie nach, dass X_1 ein Hilbertraum ist.