Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. T. Arens
Dipl.-Math. S. Heumann

Karlsruhe, den 29.10.2010

Inverse Probleme – 2.Übungsblatt

Aufgabe 4:

(a) Seien H ein Hilbertraum, $\{x_k\} \subseteq H$ ein Orthonormalsystem und $(c_k) \subseteq \mathbb{R}$ eine Folge. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} c_k x_k$ konvergent in H ist, wenn (c_k) quadrat-summierbar ist.

(b) Gegeben seien n paarweise orthogonale und normierte Vektoren $\{x_1, \dots, x_n\} \subseteq H$. Der von diesen Vektoren erzeugte Unterraum $U = \operatorname{span}\{x_1, \dots, x_n\}$ ist abgeschlossen und es existiert die orthogonale Projektion P auf U. Zeigen Sie: $Px = \sum_{k=1}^{n} (x, x_k) x_k$.

Wärmeleitungsproblem: Gegeben sei die Wärmeleitungsgleichung auf dem Rechteck $[0,\pi] \times [0,T]$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

mit den Randwerten $u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T$
und der Anfangsbedingung $u(x,0) = \varphi(x), \quad 0 \le x \le \pi.$
Wir nehmen an, dass sich φ in eine Sinusreihe entwickeln lässt.

Aufgabe 5:

(a) Lösen Sie das (direkte) Wärmeleitungsproblem mit Hilfe eines Separationsansatzes: $u(x,t) = v(x)w(t)$. Zeigen Sie: Die Lösung ist durch $u(x,t) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e^{-n^2 t} \sin(nx)$ mit $a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \varphi(y) \sin(ny)\, dy$ gegeben.

(b) Warum ist das direkte Problem gut gestellt? Schätzen Sie $u(x,t)$ mit Hilfe der Parsevalschen Gleichung ab:

$$\|x\|^2 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |(x, x_n)|^2$$

Aufgabe 6: Das inverse Problem soll in der Berechnung von u zum (festen) Zeitpunkt $\tau \in (0,T)$ – also u_τ – bei gegebener Temperaturverteilung u_T zum Zeitpunkt T bestehen. Als zusätzliche Information nehmen wir an, dass wir eine Schranke E mit $\|u(\cdot,0)\|_{L^2} \le E$ kennen. Seien dazu

$$K\colon L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi), \quad u_\tau \mapsto u_T$$

und

$$X_\tau := \left\{ v \in L^2(0,\pi) : v = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n e^{-n^2\tau} \sin(n\cdot) \text{ mit } a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} u_0(y) \sin(ny)\, dy \text{ für ein } u_0 \in L^2(0,\pi) \right\}$$

mit der Norm $\|v\|_\tau^2 := \|u_0\|_{L^2}^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{n\in\mathbb{N}} |a_n|^2$

(a) Warum ist das inverse Problem schlecht gestellt? Beschreiben Sie das Wärmeleitungsproblem $Ku_\tau = u_T$ als Integralgleichung.

(b) Schätzen Sie den worst case error $\mathcal{E}(\delta, E, \|\cdot\|_\tau) = \sup\{\|v\|_{L^2} : v \in X_\tau, \|Kv\|_{L^2} \le \delta, \|v\|_\tau \le E\}$ ab.
Hinweis: Hölder-Ungleichung

(c) Wir definieren folgende Operatoren:

$$R_\alpha\colon L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi), \quad v = \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n \sin(n\cdot) \mapsto \sum_{n\in\mathbb{N}} v_n e^{n^2(T-\tau)(1-\alpha n)} \sin(n\cdot)$$

mit $v_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} v(x) \sin(nx)\, dx$.

(i) Handelt es sich bei der Familie (R_α) um ein Regularisierungsverfahren?

(ii) Aus der Vorlesung kennen Sie die Abschätzung $\|u_\alpha^\delta - u_\tau\| \le \|R_\alpha\| \|u_T^\delta - u_T\| + \|R_\alpha K u_\tau - u_\tau\|$. Berechnen Sie eine Schranke für $\|R_\alpha\|$.