Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. T. Arens
Dipl.-Math. S. Heumann

Karlsruhe, den 8.11.2010

Inverse Probleme – 3.Übungsblatt

Aufgabe 7 Gegeben sei der Integraloperator $A\colon L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi)$ durch

$$Af(x) \;=\; \int_0^\pi k(x,y)f(y)\,dy$$

mit dem Kern

$$k(x,y) = \begin{cases} \cos(x)\sin(y) & : \quad 0 \le x \le y \le \pi, \\ \cos(y)\sin(x) & : \quad 0 \le y \le x \le \pi. \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenfunktionen von A.

Wärmeleitungsproblem: Gegeben sei die Wärmeleitungsgleichung auf dem Rechteck $[0,\pi] \times [0,1]$

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \;=\; \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$$

mit den Randwerten $\quad u(0,t) \;=\; u(\pi,t) \;=\; 0\,, \quad 0 \le t \le 1$
und der Anfangsbedingung $\quad u(x,0) \;=\; \varphi(x)\,, \quad 0 \le x \le \pi.$
Wir nehmen an, dass sich φ in eine Sinusreihe entwickeln lässt.

Aufgabe 8 Es sei $K : L^2(0,\pi) \to L^2(0,\pi)$ der Operator, welcher die Lösung des Wärmeleitungsproblems zum Zeitpunkt $t = 0$ auf die Lösung zum Zeitpunkt $t = 1$ abbildet. Berechnen Sie für K das singuläre System $\{(\sigma_j; v_j, u_j)\}$.