Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. T. Arens
Dipl.-Math. S. Heumann

Karlsruhe, den 22.11.2010

Inverse Probleme – 4.Übungsblatt

Iterierte Tikhonov-Regularisierung: Die Qualifikation der Tikhonov-Regulariserung ist 2. Wir erhöhen sie durch n-fache Iteration und erhalten ein Verfahren der Qualifikation $2n$.

Aufgabe 9: Die *n-fach iterierte Tikhonov-Regularisierung* sei definiert durch

$$x_{\alpha,0}^\delta = 0\,, \qquad (\alpha\,\mathrm{id} + K^*K)x_{\alpha,m+1}^\delta = K^*y^\delta + \alpha\, x_{\alpha,m}^\delta$$

für $m = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Zeigen Sie:

(a) Die zugehörige Filterfunktion ist durch $q_n(\alpha,\mu) := 1 - \left(1 - \frac{\mu^2}{\alpha+\mu^2}\right)^n$ gegeben.

(b) Es gilt: $|q_n(\alpha,\mu) - 1| \le c_n(\sqrt{\alpha}/\mu)^n$ für $\alpha > 0$ und $0 < \mu \le \|K\|$ mit festem $c_n > 0$.

(c) Für die zugehörigen Regularisierungsoperatoren R_α^n gilt: $\|R_\alpha^n\| \le \frac{n}{2\sqrt{\alpha}}$.

L-Kurve: Gegeben sei y^δ mit $\|y - y^\delta\| \le \delta$. x_α^δ bezeichne die Tikhonov-Lösung für $\alpha > 0$. Die sogenannte *L-Kurve* $L\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}^2$ ist definiert durch

$$\alpha \mapsto \begin{pmatrix} f(\alpha) \\ g(\alpha) \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \|Kx_\alpha^\delta - y^\delta\|^2 \\ \|x_\alpha^\delta\|^2 \end{pmatrix}, \qquad \alpha > 0.$$

Eine mögliche sinnvolle Wahl des Parameters der Tikhonov-Regularisierung ist α, so dass $L(\alpha)$ die „Ecke“ des L's ist. Dann ist keine der beiden Normen unakzeptabel groß. In der „Ecke“ hat die Kurve eine große Krümmung.

Aufgabe 10:

(a) Zeigen Sie, dass $f'(\alpha) = -\alpha\, g'(\alpha)$ gilt.

(b) Berechnen Sie die Krümmung

$$C(\alpha) \;:=\; \frac{\left|f'(\alpha)g''(\alpha) - g'(\alpha)f''(\alpha)\right|}{\left((f'(\alpha))^2 + (g'(\alpha))^2\right)^{3/2}}$$

und zeigen Sie, dass $C(\alpha)$ für $0 < \alpha \le 1/\|K\|^2$ monoton wächst.

Diskrepanzprinzip: In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Diskrepanzprinzip von Morozov i.A. nicht zu optimalen Konvergenzraten führt. Wir wollen es deshalb modifizieren. $K, y^\delta, x_\alpha^\delta, \ldots$ wie in der Vorlesung. Sei $D(\alpha, y^\delta) := \|K^*Kx_\alpha^\delta - K^*y^\delta\|^2$ für $\alpha > 0$. Wir nehmen an, dass $K^*y \ne 0$ und $K^*y^\delta \ne 0$.

Ziel: Die Wahl von $\alpha(\delta)$ mit $D(\alpha(\delta), y^\delta) = \delta^p\alpha(\delta)^{-q}$ mit gewissen $p, q > 0$ führt zu optimalen Konvergenzraten.

Aufgabe 11: Seien $q > 0$, $0 < p \le 2q$ und $\delta > 0$. Die Abbildung $\phi\colon \alpha \mapsto \alpha^q D(\alpha, y^\delta)$ ist streng monoton wachsend mit $\lim\limits_{\alpha\to 0} \phi(\alpha) = 0$ und $\lim\limits_{\alpha\to\infty} \phi(\alpha) = \infty$.

(a) Begründen Sie, warum die Gleichung $D(\alpha, y_\delta) = \delta^p\alpha^{-q}$ genau eine Lösung $\alpha(\delta)$ hat.

Es gelten die folgenden Eigenschaften: $\lim\limits_{\delta\to 0} \alpha(\delta) = 0$ und $\lim\limits_{\delta\to 0}[\delta^2/\alpha(\delta)] = 0$.

(b) Begründen Sie die Konvergenz $\lim\limits_{\delta\to 0} x_{\alpha(\delta)}^\delta = x$.

(c) Zeigen Sie, dass es für hinreichend kleine $\delta > 0$ Konstanten C_1, C_2 gibt mit: $C_1 \le \delta^p\alpha(\delta)^{-q-2} \le C_2$.

Zeigen Sie im Folgenden die Konvergenzraten:

(d) Ist $p - 2 = q \ge 2$ und $x \in K^*(Y)$, so gilt $\|x_{\alpha(\delta)}^\delta - x\| \le C\sqrt{\delta}$.

(e) Ist $\frac{3}{2}p - 2 = q \ge 1$ und $x \in K^*K(X)$, so gilt $\|x_{\alpha(\delta)}^\delta - x\| \le C\delta^{2/3}$.