Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. T. Arens
Dipl.-Math. S. Heumann

Karlsruhe, den 29.11.2010

Inverse Probleme – 5.Übungsblatt

Aufgabe 12: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Landweber-Folge zu $Kx = y$ mit Startwert $x_0 \neq 0$ und $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Landweber-Folge zu $Kx = y - Kx_0$ mit Startwert $\tilde{x}_0 = 0$, d.h.

$$x_n = x_{n-1} + aK^*(y - K\,x_{n-1})\,,\ x_0 \neq 0 \quad \text{und} \quad \tilde{x}_n = \tilde{x}_{n-1} + aK^*(y - K\,x_0 - K\,\tilde{x}_{n-1})\,,\ \tilde{x}_0 = 0.$$

Zeigen Sie, dass $x_n = \tilde{x}_n + x_0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt.

Beschleunigtes Landweber-Verfahren:

Sei $p(t) = \sum\limits_{j=0}^{k} p_j t^j$ mit $p_k \neq 0$ ein Polynom von Grad k und $A \in \mathcal{L}(X)$. Dann ist $p(A)x = \sum_{j=1}^{k} p_j A^k x$. Ist $\{\lambda_j, x_j\}$ ein vollständiges Eigensystem von A, ergibt sich: $p(A)x = \sum_{j=1}^{\infty} p(\lambda_j)(x, x_j)x_j$.

Aufgabe 13: Seien $K \in \mathcal{K}(X,Y)$ mit $\|K\| \leq 1$ und $(\lambda_j)_{j\in\mathbb{N}}$ die Eigenwerte von K^*K. Wir betrachten die folgende Landweber-Iteration zu $Kx = y$ mit Startwert $x_0 = 0$:

$$x_m \ = \ x_{m-1} + K^*(y - K\,x_{m-1})\,, \quad m \in \mathbb{N}.$$

(a) Zeigen Sie, dass es ein Filter-Polynom f_m von Grad $m-1$ gibt mit den Eigenschaften:

- (i) $x_m = f_m(K^*K)K^*y$,
- (ii) $f_m(\lambda) \to 1/\lambda$ für $m \to \infty$ punktweise für jedes $\lambda \in (0,1]$.

(b) Zeigen Sie, dass es ein Residuen-Polynom r_m von Grad m gibt mit den Eigenschaften:

- (i) $x - x_m = r_m(K^*K)x$,
- (ii) $r_m(0) = 1$,
- (iii) $|r_m| \leq 1$ gleichmäßig auf $[0,1]$ für jedes $m \in \mathbb{N}$,
- (iv) $r_m(\lambda) \to 0$ für $m \to \infty$ punktweise für jedes $\lambda \in (0,1]$.

Idee: Bei der Landweber-Regularisierung wird die Funktion $\lambda \mapsto 1/\lambda$ durch Polynome approximiert. Um das Verfahren zu beschleunigen, können wir besser geeignete Polynome verwenden: Zu einer Familie von Residuenpolynomen (r_m), die die Eigenschaften (b) (ii)-(iv) erfüllen, kann man mit den Filterpolynomen $f_m(\lambda) := (1-r_m(\lambda))/\lambda$ ein regularisierendes Iterationsverfahren ableiten. Besonders interessant sind orthogonale Polynome, da sie einer dreigliedrigen Rekursionsformel genügen, die sich dann auf die Iterierten überträgt.

Aufgabe 14: Seien $(r_m)_{m\in\mathbb{N}_0}$ Residuenpolynome mit $r_0 \equiv 1$, die die dreigliedrige Rekursion

$$r_m(\lambda) = r_{m-1}(\lambda) + \mu_m\big(r_{m-1}(\lambda) - r_{m-2}(\lambda)\big) - \omega_m\lambda r_{m-1}(\lambda)\,, \quad m \geq 2$$

erfüllen. Wir betrachten das Landweber-Verfahren zu $Kx = y$ mit Startwert $x_0 = 0$ und $x_m = f_m(K^*K)K^*y$ für $m \geq 1$, wobei $f_m(\lambda) = (1 - r_m(\lambda))/\lambda$. Zeigen Sie die Rekursionsformel der Iterierten

$$x_m = x_{m-1} + \mu_m(x_{m-1} - x_{m-2}) + \omega_m K^*(y - Kx_{m-1}),$$

indem Sie zunächst mit Hilfe der Rekursionsformel der r_m eine Rekursionsformel für f_m bestimmen.