Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. T. Arens
Dipl.-Math. S. Heumann

Karlsruhe, den 13.12.2010

Inverse Probleme – 7.Übungsblatt

Residuenpolynome des CG-Verfahrens: Die Iterierten des CG-Verfahrens zur Gleichung $K^*Kx = K^*y^\delta$ können dargestellt werden als

$$x_m^\delta = P_{m-1}(K^*K)K^*y^\delta$$

mit wohldefinierten Polynomen P_{m-1} von Grad $m-1$. Für das Residuum gilt:

$$y^\delta - Kx_m^\delta = Q_m(KK^*)y^\delta,$$

wobei $Q_m(t) := 1 - tP_{m-1}(t)$ ein Polyom von Grad m ist.

Aufgabe 17: Es sei $\{\mu_j, x_j, y_j\}$ ein singuläres System von K und $y^\delta \notin \operatorname{span}\{y_1, \ldots, y_N\}$ für alle $N \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Polynome $\{Q_m\}$ ein Orthogonalsystem auf $(0, \|K\|^2)$ bilden. Genauer, für $l \neq m$ gilt:

$$\langle Q_l, Q_m \rangle \ := \ \sum_{j=1}^{\infty} \mu_j^2 Q_l(\mu_j^2) Q_m(\mu_j^2) \big|(y^\delta, y_j)\big|^2 \ = \ 0$$

und $\langle \cdot, \cdot \rangle$ definiert ein Skalarprodukt auf dem Raum der Polynome.

Stopp-Regel: Mit den Bezeichnungen aus der Vorlesung sei $m(\delta)$ das kleinste $m \in \mathbb{N}$ mit

$$\|Kx_m^\delta - y^\delta\| \leq \tau\delta < \|Kx_{m-1}^\delta - y^\delta\|.$$

Ist $x \in K^*(Y)$, so gilt die Abschätzung $m(\delta) \leq c\delta^{-1/2}$. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass man durch Kenntnis des Abfallverhaltens der Singulärwerte von K bessere Abschätzungen für $m(\delta)$ erhalten kann. Wir wollen im Folgenden eine Abschätzung für den Fall exponentiellen Abfalls herleiten.

Aufgabe 18: Es gelten die Voraussetzungen aus Satz 4.9. Für die Singulärwerte gelte $\mu_{n+1} \leq cq^n$ für ein $q < 1$. Zeigen Sie:

$$m(\delta) \leq \tilde{c}\left(1 + \log^+ \frac{E}{\delta}\right)$$

für hinreichend kleine δ, wobei $\log^+ t = \log t$, wenn $t \geq 1$, und ansonsten $\log^+ t = 0$.

Aufgabe 19: Es sei $K \in \mathcal{K}(X, Y)$ injektiv mit singulärem System $\{\mu_j, x_j, y_j\}$. Für $\varepsilon > 0$ sei der Orthogonalprojektor

$$L_\varepsilon x = \sum_{\mu_n^2 \leq \varepsilon} (x, x_n)x_n\,, \quad x \in X,$$

definiert. Zeigen Sie: Ist $f\colon [0, \|K\|^2] \to \mathbb{R}$ eine stückweise stetige Funktion mit Sprungunstetigkeiten, so gilt die Abschätzung

$$\big\|L_\varepsilon f(K^*K)x\big\| \leq \sup_{0 \leq \mu \leq \varepsilon} |f(\mu)| \|L_\varepsilon x\|.$$