Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. T. Arens
Dipl.-Math. S. Heumann

Karlsruhe, den 13.1.2011

Inverse Probleme – 8.Übungsblatt

Aufgabe 20: Beweisen Sie die Produktregel für die Fréchet-Ableitung: Seien X, Y_1, Y_2 normierte Räume. Ist $B\colon Y_1 \times Y_2 \to \mathbb{R}$ eine beschränkte Bilinearform und sind $F_j : U \to Y_j$ $(j = 1, 2)$, $U \subseteq X$, Fréchet-differenzierbar, so gilt für $H(x) = B(F_1(x), F_2(x))$:

$$H'[x]h \;=\; B\big(F_1'[x]h, F_2(x)\big) + B\big(F_1(x), F_2'[x]h\big) \qquad \text{für alle } h \in X.$$

Aufgabe 21: Es sei $\mathcal{C}[a, b]$ der Raum der stetigen Funktionen $\varphi\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ versehen mit der Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$. Zeigen Sie, dass die beiden folgenden Abbildungen Fréchet-differenzierbar sind, und bestimmen Sie die Fréchet-Ableitungen.

(a) $A\colon \mathcal{C}[a, b] \to \mathcal{C}[a, b]$ mit $A(\varphi)(x) := \exp(\varphi(x))$, $x \in [a, b]$,

(b) $B\colon \mathcal{C}[a, b] \to \mathbb{R}$, $\varphi \mapsto \int\limits_a^b (\varphi(x))^2\,dx$.

Aufgabe 22: Der Selbstfaltungsoperator $\Phi\colon L^2(0, 1) \to L^2(0, 1)$ ist definiert durch:

$$\Phi(f)(t) \;:=\; \int_0^t f(t-\tau)f(\tau)\,d\tau.$$

Zeigen Sie:

(a) Die Selbstfaltungsgleichung $\Phi(f) = g$ ist im folgenden Sinn schlecht gestellt: Zu jedem $r > 0$ existiert eine Folge $(f_k^r)_{k\in\mathbb{N}} \subseteq \{u \in L^2(0, 1) : \|u - f\|_{L^2} \le r\}$, die nicht gegen f konvergiert, deren Bildfolge $(\Phi(f_k^r))_{k\in\mathbb{N}}$ aber gegen $\Phi(f)$ konvergiert, d.h.

$$\lim_{k\to\infty} \|\Phi(f_k^r) - \Phi(f)\|_{L^2} = 0.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Folge

$$f_k^r = \begin{cases} f\,, & \text{auf} \quad [0, 1 - \frac{1}{k+1}]\,, \\ f + r\sqrt{k+1}\,, & \text{auf} \quad (1 - \frac{1}{k+1}, 1]\,, \end{cases} \qquad \text{für } r > 0 \text{ und } k \in \mathbb{N}.$$

(b) Der Selbstfaltungsoperator ist Fréchet-differenzierbar in $f \in L^2(0, 1)$ mit der Fréchet-Ableitung

$$\Phi'[f]h(t) = 2\int_0^t f(t-\tau)h(\tau)d\tau.$$

Bemerkung: Der Selbstfaltungsoperator Φ ist nicht kompakt, aber seine Linearisierung ist es.