Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. T. Arens
Dipl.-Math. S. Heumann

Karlsruhe, den 20.1.2011

Inverse Probleme – 9.Übungsblatt

Aufgabe 23: Betrachten Sie das Neumannproblem zur Laplace-Gleichung in der Einheitskreisscheibe $D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$:
Gegeben sei eine 2π-periodische, quadrat-integrierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Gesucht ist eine Lösung u von

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \qquad \text{in } D, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= f \qquad \text{auf } \partial D. \end{aligned}$$

Dabei bezeichnen $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$, $\partial D = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ den Rand von D und $\nu = \nu(x)$ den äußeren Normaleneinheitsvektor im Punkt $x \in \partial D$.

(a) Untersuchen Sie mit Hilfe des Gaußschen Integralsatzes für welche Funktionen f eine Lösung existieren kann.
Hinweis: $\Delta = \operatorname{div}\nabla$

(b) Ist das Problem eindeutig lösbar?

(c) Bestimmen Sie die Lösung(en) des Neumannproblems in Polarkoordinaten mit einem Separationsansatz

$$u(r, \phi) \; = \; v(r)w(\phi)\,, \qquad (r, \phi) \in [0, 1] \times [0, 2\pi).$$

Hinweis: Laplace-Operator in Polarkoordinaten: $\Delta u(r, \phi) = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}u(r, \phi)\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \phi^2}u(r, \phi)$

(d) Bestimmen Sie eine Lösung des Neumannproblems für $f(\phi) = \sin^3(\phi)$.

Definition (Fourierkoeffizienten)**.** *Zu einer quadrat-integrierbaren, 2π-periodischen Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sind die Fourierkoeffizienten durch*

$$g_m \; := \; \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(t)e^{-imt}\, dt$$

für $m \in \mathbb{Z}$ definiert.

Aufgabe 24: Gegeben sei eine 2π-periodische, n-mal stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Dann sind die Fourierkoeffizienten der n-ten Ableitung $f_m^{(n)}$ quadrat-summierbar. Zeigen Sie für die Fourierkoeffizienten f_m von f:

(a)
$$f_m^{(n)} = (im)^n f_m \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

(b)
$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} (1 + m^2)^n |f_m|^2 < \infty.$$