Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. T. Arens
Dipl.-Math. S. Heumann

Karlsruhe, den 27.1.2011

Inverse Probleme – 10.Übungsblatt

Aufgabe 25: $D \subset \mathbb{R}^2$ bezeichne die Einheitskreisscheibe. Zu $\alpha \in \mathbb{R}$ sei $f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto |x|^\alpha$ gegeben. $|\cdot|$ ist die euklidische Norm: $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$.

(a) Berechnen Sie den Gradienten ∇f von f für $x \neq 0$.

(b) Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\nabla f \in L^2(D)$?

Definition (Schwache Ableitung). *Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ ein beschränktes Gebiet. Eine Funktion $f \in L^2(G)$ besitzt eine* SCHWACHE ABLEITUNG, *wenn es eine Funktion $h \in L^2(G)$ gibt, so dass*

$$\int_G f \operatorname{div} \varphi \, dx = - \int_G h \cdot \varphi \, dx \qquad \text{für alle } \varphi \in C_0^\infty(G, \mathbb{R}^n)$$

gilt, wobei $C_0^\infty(G, \mathbb{R}^n)$ der Raum der unendlich oft differenzierbaren $\mathbb{R}^n$-wertigen Funktionen mit kompaktem Träger in G ist. Notation: $\nabla f := h$.

Bemerkung Im Falle der Existenz ist die schwache Ableitung (im L^2-Sinn) eindeutig bestimmt. Bei stetig differenzierbaren Funktionen stimmen klassische und schwache Ableitung überein. Man kann zeigen, dass $H^1(D)$ der Raum der Funktionen $f \in L^2(D)$ ist, die eine schwache Ableitung besitzen.

Aufgabe 26: Untersuchen Sie, ob die folgenden Funktionen in $H^1(D)$ liegen:

(a) $f : D \to \mathbb{R}$, $x \mapsto 1 - |x|$. Zeigen Sie, dass es eine H^1-Cauchy-Folge $(f_k) \subset C^\infty(\overline{D})$ gibt, die in der L^2-Norm gegen f konvergiert und folgern Sie daraus, dass f eine schwache Ableitung besitzt.

(b) $g \in C^1(\overline{D(0,R)})$ für alle $0 < R < 1$ und $|\nabla g(x)| \geq \frac{1}{1-|x|^2}$. Betrachten Sie in obiger Definition Testfunktionen φ mit $\operatorname{supp} \varphi \subset D(0,R)$ und überprüfen Sie, ob der Kandidat für die schwache Ableitung in L^2 liegt.

Hinweis zu (a): Die folgende Funktion könnte hilfreich sein:

$$\varphi_k(x) = \begin{cases} 0\,, & |x| \leq \frac{1}{2k}, \\ \exp\left(1 - \frac{(\frac{1}{2k})^2}{(\frac{1}{2k})^2 - (\frac{1}{k} - |x|)^2}\right), & \frac{1}{2k} < |x| < \frac{1}{k}, \\ 1\,, & |x| \geq \frac{1}{k}. \end{cases}$$

Definition (Curl-Operator). *$B \subset \mathbb{R}^3$ bezeichne die Einheitskugel. Für stetig differenzierbare Vektorfelder $f : B \to \mathbb{R}^3$ ist die* ROTATION *durch*

$$\operatorname{curl} f \ := \begin{pmatrix} \frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \nabla \times f$$

definiert. Der Sobolevraum $H(\operatorname{curl}, B)$ ist der Abschluss von $C^\infty(\overline{B}, \mathbb{R}^3)$ unter der Norm

$$\|f\|_{H(\operatorname{curl},B)}^2 \ := \ \|f\|_{L^2(B,\mathbb{R}^3)}^2 + \|\operatorname{curl} f\|_{L^2(B,\mathbb{R}^3)}^2.$$

Zu seinen Elementen existiert die Rotation als L^2-Funktion.

Aufgabe 27: Zu $g \in L^\infty(B, \mathbb{R})$, d.h. g ist fast überall auf B beschränkt, definiere die Norm $\|\cdot\|_g$ durch

$$\|f\|_g^2 \ := \ \|f\|_{L^2(B)}^2 + \|\operatorname{curl} f + g f\|_{L^2(B)}^2$$

für $f \in H(\operatorname{curl}, B)$. Zeigen Sie, dass die Normen $\|\cdot\|_{H(\operatorname{curl},B)}$ und $\|\cdot\|_g$ äquivalent sind.