Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Algebra und Geometrie
PD Dr. T. Arens
Dipl.-Math. S. Heumann

Karlsruhe, den 31.1.2011

Inverse Probleme – 11.Übungsblatt

Aufgabe 28: Gegeben sei das radialsymmetrische direkte Impedanztomographie-Problem

$$\operatorname{div}(\sigma \nabla u) = 0 \quad \text{in } B, \qquad \sigma \frac{\partial u}{\partial n} = f \quad \text{auf } S^1$$

für die Leitfähigkeitsverteilung

$$\sigma = \begin{cases} 1, & r > R \\ \tilde{\sigma}, & r < R \end{cases}$$

mit einem festen $R \in (0,1)$ und dem Strommuster $f \in L^2_\diamond(S^1)$.

a) Berechnnen Sie die Lösung u dieses Problems durch einen Separationsansatz.
Hinweis: Betrachten Sie das Transmissionsproblem

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 && \text{in } B \setminus \{|x| = R\} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= f && \text{auf } S^1 \\ u|_+ &= u|_- && \text{auf } \{|x| = R\} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_+ &= \tilde{\sigma} \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_- && \text{auf } \{|x| = R\} \end{aligned}$$

wobei $w(x)|_\pm = \lim_{h \to 0} w(x \pm h\nu(x))$ für $x \in \{|x| = R\}$.

b) Untersuchen Sie das Abfallverhalten der Fourierkoeffizienten für $f \in H_\diamond^{-\frac{1}{2}}(S^1)$ und für $f \in L^2_\diamond(S^1)$.

Aufgabe 29:

a) Zeigen Sie, dass der Neumann-Dirichlet-Operator $\Lambda : L^2_\diamond(S^1) \to L^2_\diamond(S^1)$ selbstadjungiert ist.

b) Betrachten Sie nochmals das radialsymmetrische Problem aus Aufgabe 28. Λ_0 sei der Neumann-Dirichlet-Operator für den Fall $\tilde{\sigma} = 1$. Untersuchen Sie das Abfallverhalten der Eigenwerte von Λ, Λ_0 und $\Lambda_0 - \Lambda$.