Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Karlsruhe, den 21. Januar 2016

Prof. Dr. Andreas Kirsch
Julian Ott
Uwe Zeltmann

10. Übung
zur Vorlesung Inverse Probleme

Aufgabe 22: Seien $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ Hilberträume, $K : X \supset \mathcal{D}(K) \to Y$ eine im allgemeinen nicht lineare Abbildung mit offenem $\mathcal{D}(K)$. Sei $x^* \in \mathcal{D}(K)$, und es gebe ein $\rho > 0$ mit $B(x^*, \rho) \subset \mathcal{D}(K)$, sodass K auf $B(x^*, \rho)$ Fréchet-differenzierbar ist mit Lipschitz-stetiger Ableitung K' , d.h. es gebe ein $\gamma > 0$ mit

$$\|K'(x) - K'(\tilde{x})\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \;\leq\; \gamma \|x - \tilde{x}\|_X$$

für alle x, $\tilde{x} \in B(x^*, \rho)$.

Wir betrachten das inverse Problem:

$$K(x) = y \tag{1}$$

und das zugehörige linearisierte inverse Problem:

$$K'(x^*)\, h = z \tag{2}$$

an der Stelle x^*.

Zeigen Sie: Ist (1) in x^* lokal schlecht gestellt, so ist auch (2) schlecht gestellt.

Hinweis: Nach einem Lemma aus der Vorlesung gilt insbesondere

$$\|K(x) - K(x^*) - K'(x^*)(x - x^*)\|_Y \;\leq\; \frac{\gamma}{2}\|x - x^*\|_X^2 \tag{3}$$

für jedes $x \in B(x^*, \rho)$.
Zeigen Sie hiermit: Ist $K'(x^*)$ beschränkt invertierbar, so gilt für alle $x \in B(x^*, \rho)$

$$\|x - x^*\|_X \leq \|K'(x^*)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}\|K(x) - K(x^*)\|_Y + \|K'(x^*)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)}\frac{\gamma}{2}\|x - x^*\|_X^2.$$

Aufgabe 23: Sei $k \in C^1([a, b] \times [c, d] \times \mathbb{R})$ und es existiere $C_1 > 0$ mit

$$|\frac{\partial k}{\partial r}(t, s, r)| \leq C_1, \quad t \in [a, b], s \in [c, d], r \in \mathbb{R}.$$

Weiterhin sei der Integraloperator $K : C[c, d] \to C[a, b]$ definiert durch

$$K(x)(t) = \int_c^d k(t, s, x(s))ds, \quad t \in [a, b].$$

(a) Zeigen Sie: Es existiert $C > 0$ so, dass für alle $x, y \in C[c, d]$

$$\|K(x) - K(y)\|_{L^2(a,b)} \leq C\|x - y\|_{L^2(c,d)},$$

d.h. K kann stetig zu einem Operator $K : L^2(c, d) \to L^2(a, b)$ fortgesetzt werden.
Hinweis: Für $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $|f'| \leq C_1$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq C_1|x - y|, \quad x, y \in \mathbb{R}..$$

(b) Sei nun zusätzlich k zweimal stetig differenzierbar bezüglich r mit

$$|\frac{\partial^2 k}{\partial r^2}(t,s,r)| \leq C_2, \quad t \in [a,b], s \in [c,d], r \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie: $K : L^2(c,d) \to L^2(a,b)$ ist differenzierbar mit

$$K'(x^*)h(t) = \int_c^d \frac{\partial k}{\partial r}(t,s,x^*(s))h(s)ds.$$

Hinweis: Für $f \in C^2(\mathbb{R})$ mit $|f''| \leq C_2$ gilt

$$|f(x) - f(y) - f'(x)(x-y)| \leq \frac{C_2}{2}|x-y|^2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(c) Sei nun $a = 0 = c$, $b = 1 = d$, und sei $y = K(0)$. Zeigen Sie: Die Gleichung $K(x) = y$ ist in $x^* = 0$ lokal schlecht gestellt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $\|K(x) - K(0)\|_{L^\infty(0,1)} \leq C_1 \|x\|_{L^1(0,1)}$ und verwenden sie für $r > 0$ die Funktionenfolge

$$x_n(t) = r\sqrt{2n+1}\; t^n, \quad t \in [0,1], n \in \mathbb{N}.$$