Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Karlsruhe, den 4. Februar 2016

Prof. Dr. Andreas Kirsch
Julian Ott
Uwe Zeltmann

12. Übung
zur Vorlesung Inverse Probleme

Aufgabe 26: Zeigen Sie den Projektionssatz: Sei X ein Hilbertraum und M ein abgeschlossener Unterraum. Dann existiert zu jedem $w \in X$ genau ein $u \in M$ mit

$$\|u - w\| = \inf_{v \in M} \|v - w\|.$$

Weiterhin ist die so definierte Abbildung $P : X \to M, P(w) = u$ linear und beschränkt. Zudem kann u üeber die folgende Orthogonalitätsbedingung charakterisiert werden

$$\langle \tilde{u} - w, z \rangle = 0 \text{ für alle } z \in M, \tilde{u} \in M \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{u} = P(w).$$

Aufgabe 27: Seien X, Y Hilberträume, $K : X \supset \mathcal{D}(K) \to Y$ stetig Fréchet-differenzierbar auf $\mathcal{D}(K)$, $\mathcal{D}(K)$ offen, $\hat{x} \in \mathcal{D}(K)$ und $y \in Y$. Außerdem sei $\rho > 0$ so, dass Voraussetzung (V1) aus der Vorlesung erfüllt ist.

(a) Sei $M^* = \{x \in B(\hat{x}, \rho) :\ K(x) = y\}$ nichtleer.

Zeigen Sie: Es existiert ein eindeutig bestimmtes $x^+ \in M^*$ mit $\|x^+ - \hat{x}\| \leq \|x - \hat{x}\|$ für alle $x \in M^*$.

(b) Es gebe ein $x^* \in B(\hat{x}, \rho/2)$ mit $K(x^*) = y$. Die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ sei von der Landweber-Iteration mit $y^\delta = y$ und $x_0 = \hat{x}$ erzeugt. Ferner gelte

$$\mathcal{N}(K'(x^+)) \subset \mathcal{N}(K'(x)), \qquad x \in B(\hat{x}, \rho). \tag{1}$$

Zeigen Sie: $x_k \to x^+$ $(k \to \infty)$ mit dem x^+ aus Teil (a).