Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Karlsruhe, den 5. November 2015

Prof. Dr. Andreas Kirsch
Julian Ott
Uwe Zeltmann

2. Übung
zur Vorlesung Inverse Probleme

Aufgabe 4: Gegeben sei folgendes Problem:

(D) Zu gegebenem $y \in C^2[0,1]$ mit $y(0) = y(1) = 0$ finde $x \in C[0,1]$ mit $x = y''$.

(a) Formulieren Sie (D) um in ein äquivalentes Problem der Form

(I) Zu gegebenem $y \in C[0,1]$ finde $x \in C[0,1]$ mit $Kx = y$

mit einem Integraloperator

$$K : C[0,1] \to C[0,1], \qquad (Kx)(t) = \int_0^1 k(t,s)\, x(s)\, ds, \quad t \in [0,1].$$

Bemerkung: „Äquivalent“ bedeute hierbei, dass (I) zu gegebenem $y \in C[0,1]$ genau dann lösbar ist, falls y sogar die Voraussetzungen in (D) erfüllt und (D) und (I) in diesem Fall dieselbe Lösung haben.

(b) Weisen Sie nach, dass (I) schlecht gestellt ist.

Aufgabe 5: Sei $X = Y = l^2(\mathbb{C}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \|x\|_{l^2} < \infty\}$ der komplexe Folgenraum ausgestattet mit der Norm

$$\|x\|_{l^2} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2}.$$

Weiterhin seien $\alpha, \beta > 0$, und $K : l^2(\mathbb{C}) \to l^2(\mathbb{C})$ sei definiert durch $(Kx)_n := \frac{1}{n^\alpha} x_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Zudem definieren wir den Unterraum $X_1 := \{x \in l^2(\mathbb{C}) : \|x\|_1 < \infty\}$ und die Norm

$$\|x\|_1 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\beta} |x_n|^2\right)^{1/2}.$$

Zeigen Sie:

(a) K ist kompakt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Operatoren $K_m : l^2(\mathbb{C}) \to l^2(\mathbb{C})$ $(m \in \mathbb{N})$, definiert durch

$$(K_m x)_n = \begin{cases} \frac{1}{n^\alpha} x_n & \text{falls } n \le m \\ 0 & \text{falls } n \ge m+1, \end{cases}$$

in der Operatornorm gegen K konvergieren und kompakt sind.

(b) Für den worst case error zu $K : l^2(\mathbb{C}) \to l^2(\mathbb{C})$ gilt

$$\mathcal{E}(\delta, E, \|\cdot\|_1) \le \delta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} E^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}.$$

Hinweis: Hölderungleichung.