Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Karlsruhe, den 19. November 2015

Prof. Dr. Andreas Kirsch
Julian Ott
Uwe Zeltmann

4. Übung
zur Vorlesung Inverse Probleme

Aufgabe 8: Sei $K : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$,

$$Kx(t) = \int_0^t x(s)\,ds, \qquad t \in [0,1]$$

der Operator aus Aufgabe 6 und

$$Y_1 = \big\{ y \in H^1(0,1) : \quad y(0) = 0 \big\} \ .$$

(a) Zeigen Sie, dass der adjungierte Operator $K^* : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ injektiv ist.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass

$$U_1 = \big\{ y \in C^1[0,1] : \quad y(0) = 0 \big\}$$

dicht in $L^2(0,1)$ liegt.

(b) Zeigen Sie

$$Y_1 = \left\{ y \in L^2(0,1) : \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\int_0^1 y(s) \, \sin\left((\frac{\pi}{2} + n\pi)\, s \right) \, ds \right)^2 < \infty \right\} .$$

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Picard.

(c) Stellen Sie die Lösung des Problems

$$Kx = y$$

als Reihe dar.

Aufgabe 9: Seien X, Y separable Hilberträume, $K : X \to Y$ ein kompakter Operator mit Singulärwertzerlegung $(\sigma_j, x_j, y_j)_{j \in J}$, sei $s > 0$ fest gewählt, und sei $q : (0,\infty) \times (0, \|K\|] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$q(\alpha, \sigma) := 1 - \left(1 - \frac{\sigma^2}{\alpha + \sigma^2} \right)^s .$$

Zeigen Sie:

(a) q ist eine Filterfunktion.

(b) Sei R_α die zu q korrespondierende Regularisierung $R_\alpha : Y \to X$ von K. Dann gilt für alle $x \in X^{2s}$

$$\|R_\alpha K x - x\| \le \alpha^s \|x\|_{2s},$$

wobei

$$X^{2s} = \left\{ x \in \mathcal{N}(K)^\perp : \|x\|_{2s}^2 := \sum_{j \in J} \sigma_j^{-4s} |(x, x_j)|^2 < \infty \right\} .$$