Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Karlsruhe, den 3. Dezember 2015

Prof. Dr. Andreas Kirsch
Julian Ott
Uwe Zeltmann

6. Übung
zur Vorlesung Inverse Probleme

Aufgabe 13: Seien X und Y Hilberträume, $K : X \to Y$ ein injektiver kompakter Operator mit dichtem Bild und $(\sigma_j,\, x_j,\, y_j)_{j\in J}$ ein zugehöriges Singulärsystem.

In den Aufgaben 9 und 11 führten wir die iterierte Tikhonov-Regularisierung $R_{s,\alpha}$ mit Parameter $s > 0$ über die Filterfunktion

$$q_s(\alpha,\sigma) = 1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}\right)^s \tag{1}$$

ein. Für $s \in \mathbb{N}_0$ kann diese für festes $\alpha > 0,\ y \in Y$ und mit der Schreibweise $x^s := R_{s,\alpha}y$ auch implizit rekursiv definiert werden durch

$$x^0 = 0\,, \qquad (\alpha I + K^*K)\,x^{m+1} = K^*y + \alpha\,x^m\,, \qquad m = 0\,,\,\dots\,,s-1\,. \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass (2) äquivalent ist zu

$$x^0 = 0\,, \qquad x^{m+1} = x^m + z^m\,, \qquad m = 0\,,\,\dots\,,\,s-1\,,$$

wobei z^m jeweils die einzige Minimalstelle des quadratischen Funktionals:

$$J_m(z) \;:=\; \|Kz - (y - Kx^m)\|_Y^2 \;+\; \alpha\,\|z\|_X^2$$

ist.

(b) Welche bereits bekannte Regularisierung ist durch $R_{1,\alpha}$ gegeben?

(c) Zeigen Sie, dass die Filterfunktion der in (2) definierten Regularisierung tatsächlich die Form (1) hat.

Aufgabe 14: Sei $K : X \to Y$ kompakt, injektiv, mit Singulärsystem $(\sigma_j, x_j, y_j)_{j\in J}$ zwischen Hilberträumen. Sei $q : (0,\infty)\times(0,\|K\|] \to \mathbb{R}$ eine Filterfunktion mit zugehöriger Regularisierung R_α. Zeigen Sie

(a) Es gilt

$$\alpha \mapsto \|R_\alpha y\| \text{ ist monoton fallend } \forall y \in Y \quad\Leftrightarrow\quad \alpha \mapsto |q(\alpha,\sigma_j)| \text{ ist monoton fallend } \forall j \in J$$

sowie

$$\alpha \mapsto \|KR_\alpha y - y\| \text{ ist mon. steigend } \forall y \in Y \quad\Leftrightarrow\quad \alpha \mapsto |q(\alpha,\sigma_j) - 1| \text{ ist mon. steigend } \forall j \in J.$$

(b) Die zu iteriertem Tikhonov, Landweber und Spectral Cut-Off gehörenden Filterfunktionen erfüllen jeweils beide Monotonie-Kriterien aus (a).