Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Karlsruhe, den 17. Dezember 2015

Prof. Dr. Andreas Kirsch
Julian Ott
Uwe Zeltmann

8. Übung
zur Vorlesung Inverse Probleme

Aufgabe 17:

(a) Zu $\alpha > 0$ sei $\hat{g}_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\alpha x^2}$ die Fouriertransformierte einer Funktion $g_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie g_α.

Hinweis: In der Vorlesung wurde bereits gezeigt, dass die Fouriertransformierte der Funktion $h_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2}$ durch $\hat{h}_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\, e^{-x^2/4\alpha}$ gegeben ist.

(b) Mit dem g_α aus Teil (a) ist für beliebiges $f \in L^2(\mathbb{R})$ die Faltung $f * g_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\alpha > 0$. Beweisen Sie, dass

$$\|f * g_\alpha - f\|_{L^2(\mathbb{R})} \longrightarrow 0 \qquad\qquad (\alpha \to 0)\,.$$

Aufgabe 18: Sei $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ rotationssymmetrische Dichte eines Objekts mit $\operatorname{supp}(\rho) \subset B_R(0)$, d.h. es existiert $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit

$$\rho(x) = f(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Wir modellieren einen Parallelscanner, der entlang der x_1–Achse an dem Objekt vorbeifährt über die Funktion

$$V(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x_1, x_2)\; dx_2.$$

Schreiben Sie V also Integraloperator der Funktion f um, d.h. bestimmen sie $k : \mathbb{R} \times [0,\infty) \to \mathbb{R}$ so, dass

$$V(x) = \int_0^\infty k(x,r) f(r)\; dr, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Aufgabe 19: Zeigen Sie

(a) Es gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\; dx = \sqrt{\pi}.$$

Hinweis: Berechnen Sie das Quadrat des Integrals und nutzen Sie Polarkoordinaten.

(b) Es gilt für das folgende uneigendliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\; dx = \pi.$$

Hinweis: Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

mithilfe eines geeigneten Weges in der komplexen Ebene.