Inverse Probleme

Vorlesung im Wintersemester 2015/2016

Andreas Kirsch

Institut für Angewandte und Numerische Mathematik

Karlsruher Institut für Technologie (KIT)

11. Januar 2016

4 Die Radontransformation

4.1 Einführung in die Computertomographie

Wir betrachten einen ebenen waagerechten Schnitt durch einen dreidimensionalen Körper. Mit $\rho(x)$, $x \in \mathbb{R}^2$, bezeichnen wir die Dichteänderung im Punkt x gegenüber dem (homogenen) Hintergrund. Es ist also $\rho(x) = 0$ für $x \notin D$, wenn D der Schnitt des dreidimensionalen Körpers mit der $(x_1, x_2)-$Ebene ist. Sei L eine Gerade im $\mathbb{R}^2$, parametrisiert durch einen Einheitsvektor $\hat{\theta} \in S^1$ und eine Zahl $s \in \mathbb{R}$. Hier und im folgenden sei $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| = 1\}$ der Einheitskreis in der Ebene. Es sei also

$$L \;=\; L_{\hat{\theta},s} \;=\; \left\{x = s\hat{\theta} + t\hat{\theta}^\perp : t \in \mathbb{R}\right\},$$

die Gerade senkrecht zu $\hat{\theta}$ mit Abstand $|s|$ vom Ursprung, wobei

$$\hat{\theta}^\perp = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad \hat{\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}.$$

Entlang dieser Geraden wird ein Röntgenstrahl durch den Schnitt D geschickt, und der Intensitätsverlust auf der anderen Seite gemessen. Ist $I = I(x)$ die Intensität an der Stelle $x \in \mathbb{R}^2$, so ist die Intensitätsänderung dI auf einem kleinen Streckenabschnitt dt proportional zu $\rho(x)I(x)dt$, also $dI = -\gamma\rho(x)I(x)dt$ mit einer positiven Proportionalitätskonstanten γ. Integration bzgl. t von $-\infty$ bis ∞ liefert

$$\ln I \;=\; -\gamma \int\limits_L \rho(x)\, d\ell \;=\; -\gamma \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(s\hat{\theta} + t\hat{\theta}^{\perp})\, dt\,.$$

Das erste Integral beschreibt hier das Kurvenintegral entlang der Kurve L, das zweite Integral benutzt die Parametrisierung der Geraden L. Man beachte, dass hier nur über einen beschränkten Bereich integriert wird, da ρ außerhalb von D verschwindet. Im Prinzip misst die Computertomographie diese Intensitäten für alle Geraden $L_{\hat{\theta},s}$, $\hat{\theta} \in S^1$, $s \in \mathbb{R}$. Dies bedeutet, dass die Funktion $\rho : D \to \mathbb{R}$ aus der Kenntnis der **Radontransformation**

$$(R\rho)(\hat{\theta}, s) \;:=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} \rho(s\hat{\theta} + t\hat{\theta}^{\perp})\, dt\,, \quad (\hat{\theta}, s) \in S^1 \times \mathbb{R}\,, \tag{1}$$

bestimmt werden muss. Es ist also die Gleichung $R\rho = g$ zu lösen für gegebenes $g : S^1 \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Die Radontransformation selbst geht auf Radon 1917[1] zurück. Sie wurde 1963 von Cormack[2] wiederentdeckt (in der Arbeit verwies er in keiner Weise auf Radon) und für radiologische Anwendungen vorgeschlagen. Die medizinische Umsetzung geht auf Hounsfield zurück (ab 1970). Beide, der Mathematiker Cormack und der Mediziner Hounsfield erhielten dafür 1979 den Nobelpreis für Medizin.

Standardbücher zur Computertomographie sind:

- F. Natterer: The Mathematics of Computerized Tomography. J. Wiley, Teubner, 1886.
- G.T. Herman: Image Reconstruction from Projections. Academic Press, 1980.

[1] Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten

[2] Representation of a Function by its Line Integrals, with Some Radiological Applications, J. of Appl. Physics 34, 1963

- S. Helgason: The Radon Transform. Birkhäuser, 1980.

Wir halten uns auch an

- A. Louis: Inverse und schlecht gestellte Probleme. Teubner 1989.

Ganz zentral ist die Beziehung der Radontransformation zur Fouriertransformation. Daher schieben wir einen Abschnitt über die Fouriertransformation ein.

4.2 Die Fouriertransformation

In diesem Abschnitt halten wir uns im wesentlichen an:

K. Chandrasekharan: Classical Fourier Transforms. Springer, 1989.

Definition 4.1 *Wir definieren den Raum der* schnell abfallenden Funktionen *(Schwartz-Raum) als*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \;:=\; \left\{ f \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |x|^p \left| \frac{\partial^{q_1+\cdots+q_n} f(x)}{\partial x_1^{q_1} \cdots \partial x_n^{q_n}}) \right| < \infty \text{ für alle } p \in \mathbb{N}_0,\; q \in \mathbb{N}_0^n \right\}$$

Definition 4.2 *Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ definieren wir die* ***Fouriertransformation*** *durch*

$$\hat{f}(x) \;=\; (Ff)(x) \;:=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i\,x\cdot y}\, f(y)\, dy\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Lemma 4.3 *Ff existiert als uneigentliches Integral, $Ff \in C_b(\mathbb{R}^n) := \big\{ g \in C(\mathbb{R}^n) : \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \big|g(x)\big| < \infty \big\}$ und*

$$\|Ff\|_\infty \;\le\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\, \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\,, \quad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Beweis: Die Existenz des Integrals folgt aus dem Abklingverhalten von f, die Stetigkeit und Beschränktheit von Ff zeigen wir später allgemeiner (siehe Satz 4.6). Schließlich ist

$$\big|(Ff)(x)\big| \;\le\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|f(y)\big|\, dy \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\, \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}$$

und hieraus die Abschätzung. $\square$

Da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ dicht liegt in $L^1(\mathbb{R}^n)$, so lässt sich nach dem allgemeinen Fortsetzungssatz F fortsetzen als beschränkter Operator von $L^1(\mathbb{R}^n)$ nach $C_b(\mathbb{R}^n)$. Natürlich kann man auch gleich Ff für Funktionen aus $L^1(\mathbb{R}^n)$ definieren, hat dann das Integral als Lebesgueintegral zu interpretieren.

Wir wollen uns zwei einfache Beispiele ansehen:

Beispiel 4.4 *(a) Für $f(x) = 1/(1+x^2)$ ist (mit Hilfe des Residuensatzes)*

$$\hat{f}(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp(ixy)}{1+y^2}\, dy \;=\; \cdots \;=\; \sqrt{\frac{\pi}{8}}\, \exp(-|x|)\,.$$

(b) Für $f(x) = \exp(-\alpha x^2)$, $\alpha > 0$ fester Parameter, ist

$$\hat{f}(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ixy-\alpha y^2}\, dy\,.$$

Ableiten nach x (dies ist erlaubt!) und anschließende partielle Integration auf die Faktoren $\exp(ixy)$ und $y\exp(-\alpha y^2)$ liefert $\hat{f}'(x) = -\frac{x}{2\alpha}\hat{f}(x)$ und daher $\hat{f}(x) = \hat{f}(0)\,\exp\bigl[-x^2/(4\alpha)\bigr]$. Aus der Analysisvorlesung ist bekannt, dass $\hat{f}(0) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$, also

$$\hat{f}(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\, e^{-x^2/(4\alpha)}\,.$$

Zunächst können wir die folgenden Eigenschaften zeigen:

Satz 4.5 (a) Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt die „Verschiebungsformel“: Ist für ein festes $h \in \mathbb{R}^n$ die Funktion $f_h(y) = f(y+h)$ für $y \in \mathbb{R}^n$ definiert, so ist

$$(Ff_h)(x) \;=\; e^{ix\cdot h}\,(Ff)(x)\,, \quad \text{d.h.} \quad \hat{f}_h(x) \;=\; e^{ix\cdot h}\,\hat{f}(x)\,.$$

(b) F bildet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in sich ab.

(c) Differentiationsformeln: Sei $p \in \mathbb{N}_0^n$ ein Multiindex, P das zugehörige Monom und D_P der zugehörige Differentiationsoperator, d.h.

$$P(y) \;=\; (iy_1)^{p_1}(iy_2)^{p_2}\cdots(iy_n)^{p_n}\,, \quad D_P \;=\; \frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n}}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}}\,.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} D_P F f &= F(Pf)\,, \quad \text{d.h.} \quad D_P \hat{f}(x) = \widehat{(Pf)}(x)\,. \\ F D_P f &= \overline{P} F f\,, \quad \text{d.h.} \quad \widehat{D_P f}(x) = \overline{P(x)}\, \hat{f}(x)\,, \end{aligned}$$

wobei $\overline{P(x)} = (-ix_1)^{p_1}(-ix_2)^{p_2}\cdots(-ix_n)^{p_n}$ das konjugiert-komplexe Monom ist.

(d) Faltungsformeln: Die **Faltung** von f und g ist definiert durch

$$(f*g)(x) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y)\,f(y)\,dy = (g*f)(x)\,.$$

Es ist $f*g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, und es gilt:

$$\begin{aligned} F(f*g) &= (2\pi)^{n/2}\,(Ff)\,(Fg)\,, \quad \text{d.h.} \quad \widehat{(f*g)}(x) = (2\pi)^{n/2}\,\hat{f}(x)\,\hat{g}(x)\,, \\ F(fg) &= (2\pi)^{n/2}\,(Ff)*(Fg)\,, \quad \text{d.h.} \quad \widehat{(fg)}(x) = (2\pi)^{n/2}\,(\hat{f}*\hat{g})(x)\,. \end{aligned}$$

Beweis: (a) ist trivial.

(b), (c) Es sei

$$D_P = \frac{\partial^{p_1+\cdots+p_n}}{\partial x_1^{p_1}\cdots\partial x_n^{p_n}} \quad \text{und} \quad P(y) = (iy_1)^{p_1}(iy_2)^{p_2}\cdots(iy_n)^{p_n}$$

ein Differentialoperator mit zugehörigem Monom und analog D_Q mit Q. Die Fouriertransformation $\hat{f}(x)$ ist ein Integral mit x als Parameter. Aus der Analysisvorlesung ist bekannt (z.B. H. Heuser, Anaysis 2, Kapitel 128), dass man nach dem Parameter differenzieren darf, wenn die Ableitung eine integrierbare Majorante besitzt. Die Ableitung (bzgl. x) des Integranden ist

$$D_{P,x}\big[e^{ix\cdot y}f(y)\big] = P(y)\,e^{ix\cdot y}f(y)$$

und daher $\big|D_P[e^{ix\cdot y}f(y)]\big| \le \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\big|P(y)f(y)\big|$ für alle $x\in\mathbb{R}^n$, und diese Funktion ist integrierbar wegen $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Hieraus folgt die beliebige Differenzierbarkeit von Ff und auch schon $D_P F = FP$. Analog ist mit partieller Integration

$$\begin{aligned} \overline{Q(x)} D_P F f(x) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} P(y) f(y) \overline{Q(x)} e^{ix\cdot y} dy \\ &= (-1)^{q_1+\cdots+q_n} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} P(y) f(y) D_{Q,y} e^{ix\cdot y} dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} D_Q[P(y)f(y)]\, e^{ix\cdot y} dy\,, \end{aligned}$$

und dieses Integral existiert, weil auch jede Ableitung von $y \mapsto P(y)f(y)$ integraierbar ist. Also bildet F den Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in sich ab und es ist für $P(y) = 1$ und daher $D_P = id$ auch $\overline{Q}Ff = FD_Q f$.

(d) Zunächst sieht man, dass $f * g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ (analog zu (b)) und weiter mit der binomischen Formel:

$$\begin{aligned}
|x|^p \big|(f*g)(x)\big| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \big[|x-y| + |y|\big]^p \,\big|f(x-y)\big|\,\big|g(y)\big|\,dy \\
&= \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} \int_{\mathbb{R}^n} \big[|x-y|^{p-j}\big|f(x-y)\big|\big]\,\big[|y|^j\big|f(y)\big|\big]\,dy \\
&\leq c \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} \int_{\mathbb{R}^n} |y|^j \big|f(y)\big|\,dy\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,,
\end{aligned}$$

wobei c den Ausdruck $|z|^{p-j}\big|f(z)\big|$ für alle $z \in \mathbb{R}^n$ und alle $j = 0, \ldots, p$ beschränkt. Daher ist

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^p \big|(f*g)(x)\big| \;<\; \infty\,.$$

Da alle Ableitungen von f auch in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ liegen, gilt eine solche Abschätzung auch für alle Ableitungen von $f * g$.

Weiter ist

$$\begin{aligned}
(2\pi)^{n/2}\widehat{(f*g)}(x) &= \int e^{ix\cdot y}\left[\int g(y-z)\,f(z)\,dz\right]dy \\
&= \int \left[\int e^{ix\cdot y}\,g(y-z)\,dy\right] f(z)\,dz \\
&= \int \left[\int e^{ix\cdot(y+z)}\,g(y)\,dy\right] f(z)\,dz \\
&= \int e^{ix\cdot y}\,g(y)\,dy \int e^{ix\cdot z}\,f(x)\,dz \;=\; (2\pi)^n\,\hat{f}(x)\,\hat{g}(x)\,.
\end{aligned}$$

Wir dürfen die Integrationsreihenfolge vertauschen, da der Integrand glatt ist und schnell genug abfällt. Es gilt nämlich eine Abschätzung der Form (für jedes $p \in \mathbb{N}$):

$$\begin{aligned}
&\sup_{y,z \in \mathbb{R}^n} |y|^p |z|^p \left|e^{ix\cdot y}\,g(y-z)\,f(z)\right| \\
&\leq \sum_{j=0}^{p} \binom{p}{j} \sup_{y,z\in\mathbb{R}^n} |y-z|^{p-j}\big|g(y-z)\big|\,|z|^{p+j}\big|f(z)\big| \qquad (2)\\
&< \infty\,.
\end{aligned}$$

Die andere Formel zeigt man ganz ähnlich! $\square$

Damit können wir einen zentralen Satz der Fouriertheorie beweisen:

Satz 4.6 *(Umkehrformel in $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$)*
Mit $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ist auch $\hat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, und es gilt die Umkehrformel:

$$f(x) \;=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-ix\cdot y}\, \hat{f}(y)\, dy\,, \quad x \in \mathbb{R}^n\,.$$

Daher ist $F : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ ein Isomorphismus des Vektorraumes $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ auf sich. Ferner gilt die Formel von Plancherel (oder die Parsevalsche Gleichung):

$$(Ff, Fg)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \;=\; (f,g)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \quad \text{für alle } f,g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)\,.$$

Daher ist F ein unitärer Normisomorphismus des Prä-Hilbertraumes $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^n)})$ auf sich.

Beweis: Wir haben schon gesehen, dass F den Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ in sich abbildet. Wir zeigen die Umkehrformel zunächst nur für $n = 1$ und haben

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy} \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)\, e^{iyz} dz \right] dy \;=\; f(x)$$

zu beweisen. Sei $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ zunächst beliebig. Dann definieren wir für festes x

$$I \;:=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\, \phi(y)\, \hat{f}(y)\, dy \;=\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\, \phi(y) \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)\, e^{iyz}\, dz \right] dy$$

und vertauschen die Integrationsreihenfolge, also

$$\begin{aligned} I \;&=\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z) \left[\int\limits_{-\infty}^{\infty} \phi(y)\, e^{i(z-x)y}\, dy \right] dz \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(z)\, \hat{\phi}(z-x)\, dz \\ &=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+z)\, \hat{\phi}(z)\, dz\,. \end{aligned}$$

Die Vertauschung ist erlaubt, da der Integrand $f(z)\,\phi(y)\,e^{i(z-x)y}$ schnell abfällt. Wähle jetzt für $\varepsilon > 0$ speziell $\phi_\varepsilon(y) := e^{-(\varepsilon y)^2/2}$. Dann ist $\phi_\varepsilon \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ und nach Beispiel 4.4

$$\hat{\phi_\varepsilon}(z) \;=\; \frac{1}{\varepsilon}\, e^{-z^2/(2\varepsilon^2)}\,.$$

Also ist (Variablensubstitution $z \leftrightarrow z/\varepsilon$):

$$I_\varepsilon \;=\; \frac{1}{\varepsilon\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+z)\, e^{-z^2/(2\varepsilon^2)}\, dz \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x+\varepsilon z)\, e^{-z^2/2}\, dz\,,$$

und dies konvergiert gegen $f(x)\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = f(x)$ für $\varepsilon \to 0$, wie man sehr einfach zeigt (Mittelwertsatz). Auf der anderen Seite konvergiert

$$I_\varepsilon \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\, \phi_\varepsilon(y)\, \hat{f}(y)\, dy$$

nach dem Lebesgueschen Konvergenzsatz gegen $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ixy}\, \hat{f}(y)\, dy$. Hieraus folgt die Umkehrformel für $n = 1$. Für $n > 1$ bemerken wir, dass die $n-$dimensionale Fouriertransformation F_n nichts anderes ist als die Hintereinanderausführung der eindimensionalen Fouriertransformation F_1, angewendet auf alle Koordinaten, d.h.

$$F_n = \; F_{1,x_1} \circ F_{1,x_2} \circ \cdots \circ F_{1,x_n}\,,$$

wobei F_{1,x_j} die eindimensionale Fouriertransformation bzgl. der Variablen x_j sei. Dies folgt einfach auch der Beobachtung, dass $e^{ix\cdot y} = e^{ix_1 y_1} \cdots e^{ix_n y_n}$. Die Reihenfolge der F_{1,x_j} ist dabei beliebig.

Die Formel von Plancherel läßt sich nun ganz einfach zeigen:

$$\begin{aligned}
(\hat{f}, \hat{g})_{L^2(\mathbb{R}^n)} \;&=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)\, e^{ix\cdot y}\, dy \right] \overline{\hat{g}(x)}\, dx \\
&=\; \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y) \overline{\left[\int\limits_{\mathbb{R}^n} \hat{g}(x)\, e^{-ix\cdot y}\, dx \right]} dy \\
&=\; \left(f, F^{-1}\hat{g}\right)_{L^2(\mathbb{R}^n)} \;=\; (f, g)_{L^2(\mathbb{R}^n)}\,.
\end{aligned}$$

□

Dieser Satz ermöglicht es, den Fourieroperator auf die Vervollständigung des Prä-Hilbertraumes $(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n), \|\cdot\|_{L^2})$ auszudehnen. Damit kann also der Fourieroperator F aufgefasst werden als unitärer Normisomorphismus in $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Ganz wichtig sind die Übertragungen der Faltungssätze auf L^2- und L^1-Funktionen.

Lemma 4.7 *(Young)*

(a) Sei $p \in [1,\infty]$ *und* $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$.

(i) Für $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *ist* $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *und*

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \;\leq\; \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \,. \tag{3}$$

(ii) Für $g \in C_b(\mathbb{R}^n)$ *ist* $f * g \in C_b(\mathbb{R}^n)$ *und*

$$\|f * g\|_\infty \;\leq\; \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_\infty \,. \tag{4}$$

(b) Für $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ *und* $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $p = 1$ *oder* 2, *ist*

$$F(f * g) \;=\; (2\pi)^{n/2}\,(Ff)(Fg)\,. \tag{5}$$

Bemerkung: Teil (a) des Lemmas besagt für $p = 1$, daß $L^1(\mathbb{R}^n)$ mit der Faltung eine *normierte Algebra* ist, sogar eine *Banachalgebra*. Sie hat aber *kein* Einselement, wie man zeigen kann. Die Eins müßte nämlich so etwas wie die Delta-Distribution sein.

Beweis: (a) Wir werden wieder ein Fortsetzungsargument verwenden. Zunächst nehmen wir also $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ an und auch $1 < p < \infty$. Der Fall $p = 1$ kann analog behandelt werden und ist einfacher. Wir benutzen die Höldersche Ungleichung

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} u(x)\, v(x)\, dx \right| \;\leq\; \left(\int_{\mathbb{R}^n} \big|u(x)\big|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \big|v(x)\big|^q dx \right)^{1/q}$$

für $u, v \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Hierbei ist q durch die Gleichung $1/q + 1/p = 1$ bestimmt. Wir spalten geeignet auf und schreiben

$$\begin{aligned} \big|(f * g)(x)\big| \;&\leq\; \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\big|f(x-y)\big|^{1/p} \big|g(y)\big| \Big)\, \big|f(x-y)\big|^{1/q}\, dy \\ &\leq\; \left(\int_{\mathbb{R}^n} \big|f(x-y)\big|\, \big|g(y)\big|^p\, dy \right)^{1/p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \big|f(x-y)\big|\, dy \right)^{1/q} \end{aligned}$$

und daher

$$\big|(f*g)(x)\big|^p \;\le\; \|f\|^{p/q}_{L^1(\mathbb{R}^n)} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \big|f(x-y)\big|\,\big|g(y)\big|^p\,dy\,.$$

Der Integrand fällt bzgl beider Variablen x und y schnell ab (vgl. (2)). Daher können wir bzgl. x integrieren und die Integrationsreihenfolge vertauschen. Dies liefert

$$\|f*g\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \;\le\; \|f\|^{p/q}_{L^1(\mathbb{R}^n} \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\, \|g\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n}$$

und hieraus die Behauptung wegen $\frac{p}{q}+1=p$.

Sei jetzt $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ festgehalten. Wir haben in (3) gezeigt, dass die lineare Abbildung $g\mapsto f*g$ des Prä-Hilbertraumes $\big(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\|\cdot\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\big)$ in sich für $p\in[1,\infty)$ beschränkt ist. Der allgemeine Fortsetzungssatz liefert die Beschränktheit dieser Abbildung auch von $L^p(\mathbb{R}^n)$ in sich mit der gleichen Normabschätzung (3) für alle $g\in L^p(\mathbb{R}^n)$ und $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$.

Sei jetzt $g\in L^p(\mathbb{R}^n)$ festgehalten. Dann besagt die Abschätzung (3), dass die lineare Abbildung $f\mapsto f*g$ des Prä-Hilbertraumes $\big(\mathcal{S}(\mathbb{R}^n),\|\cdot\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}\big)$ nach $L^p(\mathbb{R}^n)$ beschränkt ist. Das gleiche gilt also auch für die Fortsetzung der Abbildung von $L^1(\mathbb{R}^n)$ nach $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Es bleiben die Fälle $g\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ und $g\in C_b(\mathbb{R}^n)$ übrig. Hier können wir nicht so argumentieren, da $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ nicht dicht liegt in diesen Räumen. Beide Fälle sind aber einfach direkt zu behandeln, für $g\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ kommt man aber wohl nicht um das Lebesgueintegral herum.

(b) Wir haben (5) schon für $f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gezeigt. Für die Fortsetzung für $f\in L^1(\mathbb{R}^n)$ und $g\in L^p(\mathbb{R}^n)$ ($p=1$ oder 2) kann man wie im Beweis von (a) vorgehen. □

4.3 Umkehrformeln für die Radontransformation

Definition 4.8 *Für $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ definieren wir die Radontransformation Rf durch (vgl. (1))*

$$(Rf)(\hat\theta,s) \;:=\; \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s\hat\theta+t\hat\theta^\perp)\,dt\,,\quad (\hat\theta,s)\in S^1\times\mathbb{R}\,. \tag{6}$$

Hierbei ist wieder $\hat\theta^\perp=\binom{-\sin\theta}{\cos\theta}$ für $\hat\theta=\binom{\cos\theta}{\sin\theta}$.

Bemerkung: Rf ist eine gerade Funktion auf dem Zylinder $S^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^3$, denn mit der Variablentransformation $t' = -t$ ist

$$(Rf)(-\hat{\theta}, -s) \ := \int_{-\infty}^{\infty} f(s\hat{\theta} + t(-\hat{\theta})^{\perp})\, dt \ = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\hat{\theta} + t'\hat{\theta}^{\perp})\, dt' \ = \ (Rf)(\hat{\theta}, s)\,.$$

Die Radontransformation bildet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ in $\mathcal{S}(S^1 \times \mathbb{R})$ ab, wobei

$$\mathcal{S}(S^1 \times \mathbb{R}) \ = \ \big\{ g|_{S^1 \times \mathbb{R}} : g \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \big\}$$

der Raum der Einschränkungen von Funktionen aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ auf $S^1 \times \mathbb{R}$ bedeute.

Lemma 4.9 *Die Radontransformation R bildet $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ in $\mathcal{S}(S^1 \times \mathbb{R})$ ab.*

Beweis: Sei $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R})$ eine Funktion mit $\varphi(\tau) = 0$ für $\tau \notin \left(\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$ und $\varphi(\tau) = 1$ für $\tau \in \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right)$. Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ und setze

$$\begin{aligned} u(x_1, x_2, x_3) \ &= \ \varphi(x_1^2 + x_2^2) \int_{-\infty}^{\infty} f(x_3 x_1 - t x_2, x_3 x_2 + t x_1)\, dt \\ &= \ \varphi(x_1^2 + x_2^2) \int_{-\infty}^{\infty} f\Big(x_3 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}\Big)\, dt \quad \text{für } x \in \mathbb{R}^3\,. \end{aligned}$$

Dann ist $u(\cos\theta, \sin\theta, s) = (Rf)(\hat{\theta}, s)$ für alle $\theta \in \mathbb{R}$ und $s \in \mathbb{R}$. Wir zeigen $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Dazu schätzen wir den Integranden $v(x,t) := f(x_3 x_1 - t x_2, x_3 x_2 + t x_1)$ ab. Es reicht, dies für $\frac{1}{3} \leq x_1^2 + x_2^2 \leq \frac{5}{3}$ und beliebiges $x_3 \in \mathbb{R}$ zu tun, da u außerhalb dieses Zylinders u verschwindet. Sei $q = (q_1, q_2, q_3) \in \mathbb{N}_0^3$ ein Multiindex. Mit der üblichen Konvention $|q| = q_1 + q_2 + q_3$ zeigt man schnell, dass für $x \in \mathbb{R}^3$ und $t \in \mathbb{R}$ eine Abschätzung der Form

$$\left| \frac{\partial^{|q|} v(x,t)}{\partial x_1^{q_1} \partial x_2^{q_2} \partial x_3^{q_3}} \right| \ \leq \ c_1 \left(|x|^n + |t|^n \right) \sum_{j+k \leq |q|} \left| \left. \frac{\partial^{j+k} f(y_1, y_2)}{\partial y_1^j \partial y_2^k} \right|_{(x_3 x_1 - t x_2, x_3 x_2 + t x_1)} \right|$$

gilt mit einem ein $n \in \mathbb{N}$ und einer Konstanten c_1. In der Summe stehen alles Funktionen aus $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$. Sei jetzt $p \in \mathbb{N}_0$ beliebig. Wähle m mit $2m \geq p + n + 2$. Zu diesem m existiert $c_2 > 0$ mit

$$\sum_{j+k \leq |q|} \left| \frac{\partial^{j+k} f(y_1, y_2)}{\partial y_1^j \partial y_2^k} \right| \ \leq \ \frac{c_2}{1 + |y|^{2m}} \quad \text{für alle } y \in \mathbb{R}^2\,,$$

also für $\frac{1}{3} \le x_1^2 + x_2^2 \le \frac{5}{3}$ und $|x_3| \ge \frac{4}{3}$:

$$
\begin{aligned}
|x|^p \left| \frac{\partial^{|q|} v}{\partial x_1^{q_1} \partial x_2^{q_2} \partial x_3^{q_3}}(x,t) \right| &\le c_1 c_2 \, \frac{|x|^p \left(|x|^n + |t|^n\right)}{1 + \left| x_3 \binom{x_1}{x_2} + t \binom{-x_2}{x_1} \right|^{2m}} \\
&= c_1 c_2 \, \frac{|x|^p \left(|x|^n + |t|^n\right)}{1 + \left[(x_3^2 + t^2)\,(x_1^2 + x_2^2) \right]^m} \\
&\le c_1 c_2 \, 3^m \, \frac{|x|^p \left(|x|^n + |t|^n\right)}{(x_3^2 + t^2)^m} \\
&\le \underbrace{c_1 c_2 \, 3^m}_{=c} \, \frac{|x|^p \left(|x|^n + |t|^n\right)}{(|x|^2/2 + t^2)^m}
\end{aligned}
$$

wegen $|x|^2 \le \frac{4}{3} + x_3^2 \le 2x_3^2$. Wir integrieren diesen Ausdruck bzgl t von $-\infty$ bis ∞ und benutzen die Variablentransformation $t = |x|\tau$. Dann erhalten wir

$$
|x|^p \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\partial^{|q|} v(x,t)}{\partial x_1^{q_1} \partial x_2^{q_2} \partial x_3^{q_3}} \right| dt \;\le\; c \, \frac{|x|^{n+p+1}}{|x|^{2m}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 + \tau^n}{(1/2 + \tau^2)^m} \, d\tau \, .
$$

Das Integral auf der rechten Seite existiert und ist beschränkt bzgl. x mit $\frac{1}{3} \le x_1^2 + x_2^2 \le \frac{5}{3}$ wegen $2m \ge p + n + 2 \ge n + 2$. Daher ist $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, und das Lemma ist bewiesen. $\square$

Den Zusammenhang mit der Fouriertransformation liefert der folgende Satz:

Satz 4.10 *(Fourier-Theorem, Projektionssatz)*
Sei $F_n : \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ die $n-$dimensionale Fouriertransformation vom letzten Abschnitt. Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ gilt

$$
(F_2 f)(s\hat{\theta}) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, (F_{1,s} R f)(\hat{\theta}, s) \, , \quad \hat{\theta} \in S^1 \, , \;\; s \in \mathbb{R} \, , \tag{7}
$$

wobei das Symbol $F_{1,s}$ bedeutet, dass die eindimensionale Fouriertransformation bzgl. der Variablen s angewendet wird.

Beweis: Wir rechnen aus:

$$
\begin{aligned}
(F_{1,s} R f)(\hat{\theta}, s) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma s} (Rf)(\hat{\theta}, \sigma) \, d\sigma \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma s} f(\sigma\hat{\theta} + t\hat{\theta}^{\perp}) \, dt \, d\sigma \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint_{\mathbb{R}^2} e^{i\sigma s} f(\sigma\hat{\theta} + t\hat{\theta}^{\perp}) \, d(t,\sigma) \, .
\end{aligned}
$$

Dies ist ein ebenes Gebietsintegral. Wir benutzen die Transformationsformel und transformieren die $(\sigma, t)-$Ebene in die $(x_1, x_2)-$Ebene. Wir setzen also $x = \sigma\hat{\theta} + t\hat{\theta}^\perp = \left(\begin{smallmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}\sigma \\ t\end{smallmatrix}\right)$. Dies ist eine Drehung um θ. Daher ist $dx = d(\sigma, t)$ und $\sigma = x \cdot \hat{\theta}$, also

$$(F_{1,s}Rf)(\hat{\theta}, s) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{i(s\hat{\theta})\cdot x} f(x)\, dx \;=\; \sqrt{2\pi}\,(F_2 f)(s\hat{\theta})\,.$$

$\square$

Dieser Satz liefert uns schon die Injektivität von R und sogar eine Umkehrformel: Für gerades $g \in \mathcal{S}(S^1 \times \mathbb{R})$ ist die Lösung f von $Rf = g$ im Fourierraum gegeben durch

$$(F_2 f)(x) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,(F_{1,s}g)(x/|x|, |x|)\,, \quad x \in \mathbb{R}^2\,,\; x \neq 0\,.$$

Eine weitere Umkehrformel wird mit Hilfe der L^2-Adjungierten von R und der Hilberttransformation gewonnen.

Satz 4.11 *Die L^2-Adjungierte $R^\sharp : \mathcal{S}(S^1 \times \mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ von $R : \mathcal{S}(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{S}(S^1 \times \mathbb{R})$ ist gegeben durch*

$$(R^\sharp g)(x) \;=\; \int\limits_{S^1} g(\hat{\theta}, x\cdot\hat{\theta})\, d\ell(\hat{\theta})\,, \quad x \in \mathbb{R}^2\,.$$

Beweis: Es ist wieder mit der Transformation $x = s\hat{\theta} + t\hat{\theta}^\perp = \left(\begin{smallmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix}s \\ t\end{smallmatrix}\right)$:

$$\begin{aligned}
\int\limits_{S^1}\int\limits_{-\infty}^{\infty} (Rf)(\hat{\theta}, s)\, g(\hat{\theta}, s)\, ds\, d\ell(\hat{\theta}) \;&=\; \int\limits_{S^1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(s\hat{\theta} + t\hat{\theta}^\perp)\, g(\hat{\theta}, s)\, dt\, ds\, d\ell(\hat{\theta}) \\
&=\; \int\limits_{S^1}\iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x)\, g(\hat{\theta}, x\cdot\hat{\theta})\, dx\, d\ell(\hat{\theta}) \\
&=\; \iint\limits_{\mathbb{R}^2} f(x) \int\limits_{S^1} g(\hat{\theta}, x\cdot\hat{\theta})\, d\ell(\hat{\theta})\, dx\,.
\end{aligned}$$

$\square$

Bemerkung: Für die Auswertung von Rf wird f über alle Punkte einer Geraden integriert. Da die Parameter $(\hat{\theta}, x \cdot \hat{\theta})$ genau die Gerade durch x senkrecht zu $\hat{\theta}$

beschreiben, so werden bei der Auswertung von $R^\sharp g$ alle Geraden durch x herangezogen.

Es folgt ein kleiner Ausflug über die Hilberttransformation. Eine mögliche Definition ist die folgende:

Definition und Satz 4.12 *Für $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ existiert die Hilberttransformation*

$$(Hg)(t) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(s)}{t-s}\,ds\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

wobei das Integral im Cauchyschen Hauptwertsinn zu verstehen ist, also

$$(Hg)(t) \;=\; \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-\infty}^{t-\varepsilon} \frac{g(s)}{t-s}\,ds + \int_{t+\varepsilon}^{\infty} \frac{g(s)}{t-s}\,ds\right].$$

Ferner gilt die Darstellung

$$(Hg)(t) \;=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(t-s)-g(t+s)}{s}\,ds\,, \quad t \in \mathbb{R}\,,$$

wobei jetzt das Integral im uneigentlichen Sinn zu verstehen ist.

Beweis: Wir spalten auf:

$$[\cdots] \;=\; \left[\int_{t-1}^{t-\varepsilon} \frac{g(s)}{t-s}\,ds + \int_{t+\varepsilon}^{t+1} \frac{g(s)}{t-s}\,ds\right] \;+\; \int_{-\infty}^{t-1} \frac{g(s)}{t-s}\,ds \;+\; \int_{t+1}^{\infty} \frac{g(s)}{t-s}\,ds\,.$$

Die letzten beiden Integrale existieren wegen dem Abfallverhalten von g. Ferner ist

$$\begin{aligned}\int_{t-1}^{t-\varepsilon} \frac{g(s)}{t-s}\,ds + \int_{t+\varepsilon}^{t+1} \frac{g(s)}{t-s}\,ds \;&=\; \int_{t-1}^{t-\varepsilon} \frac{g(s)-g(t)}{t-s}\,ds + \int_{t+\varepsilon}^{t+1} \frac{g(s)-g(t)}{t-s}\,ds \\ &\quad + g(t)\underbrace{\left[\int_{t-1}^{t-\varepsilon} \frac{1}{t-s}\,ds + \int_{t+\varepsilon}^{t+1} \frac{1}{t-s}\,ds\right]}_{=\,0}.\end{aligned}$$

Die Funktion $\psi(s) = \frac{g(s)-g(t)}{t-s}$ ist in t stetig ergänzbar (l'Hospitalsche Regel), daher existieren die beiden ersten Integrale und auch der Limes $\varepsilon \to 0$.

Für den zweiten Teil der Behauptung setzen wir

$$I \;=\; \int_{-\infty}^{t-\varepsilon} \frac{g(s)}{t-s}\,ds \;+\; \int_{t+\varepsilon}^{\infty} \frac{g(s)}{t-s}\,ds$$

und substituieren $s' = t - s$. Dann erhalten wir

$$I \;=\; \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{g(t-s')}{s'}\,ds' \;+\; \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{g(t-s')}{s'}\,ds' \;=\; \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{g(t-s)-g(t+s)}{s}\,ds\,,$$

wobei wir im ersten Integral wieder s statt s' geschrieben und im zweiten Integral $s = -s'$ substituiert haben. Substituieren wir in dieser Formel noch einmal s für $-s$, so erhalten wir

$$I \;=\; -\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{g(t+s)-g(t-s)}{s}\,ds\,,$$

und daher nach Addition

$$2I \;=\; \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{g(t-s)-g(t+s)}{s}\,ds \;+\; \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{g(t-s)-g(t+s)}{s}\,ds\,.$$

Dies beendet den Beweis. $\square$

Man kann die Hilberttransformation auch einfach durch die Fouriertransformation ausdrücken.

Satz 4.13 *Für $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist*

$$Hg \;=\; i\,F^{-1}\big((Fg)\,\mathrm{sign}\big)\,,$$

wobei F für die eindimensionale Fouriertransformation steht und sign *die Signum-Funktion ist, d.h.* $\mathrm{sign}\,s = s/|s|$ *für $s \neq 0$.*

Beweis: Mit $\hat{g} = Fg$ ist

$$\begin{aligned}(Hg)(t) \;=\; (HF^{-1}\hat{g})(t) \;&=\; \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s}\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \big(e^{-i(t-s)\sigma} - e^{-i(t+s)\sigma}\big)\,\hat{g}(\sigma)\,d\sigma\,ds \\ &=\; \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s}\,e^{-it\sigma}\,2i\,\sin(s\sigma)\,\hat{g}(\sigma)\,d\sigma\,ds\,.\end{aligned}$$

Wir würden gern die Integrationsreihenfolge vertauschen. So einfach ist das aber nicht (weshalb nicht?), daher betrachten wir

$$\begin{aligned} \int_{-a}^{a}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{s}\, e^{-it\sigma} \sin(s\sigma)\, \hat{g}(\sigma)\, d\sigma\, ds &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\sigma}\, \hat{g}(\sigma) \int_{-a}^{a} \frac{\sin(s\sigma)}{s}\, ds\, d\sigma \\ &= \pi \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\sigma}\, \hat{g}(\sigma)\, \psi_a(\sigma)\, d\sigma \qquad (8) \end{aligned}$$

mit

$$\psi_a(\sigma) \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-a}^{a} \frac{\sin(s\sigma)}{s}\, ds \;=\; \frac{1}{\pi}\int_{-a\sigma}^{a\sigma} \frac{\sin s}{s}\, ds \;=:\; \varphi(a\sigma)\,.$$

In (8) durften wir die Integrationsreihenfolge vertauschen, da der Integrand bzgl. $(\sigma, s) \in \mathbb{R}\times[-a, a]$ glatt und integrierbar ist. Die Funktion ψ_a konvergiert für $a \to \infty$ punktweise gegen sign, d.h. $\psi_a(\sigma) \to \sigma/|\sigma|$ für $\sigma \neq 0$[3]. Ferner ist ψ_a beschränkt, d.h. es gibt $c > 0$ mit $\big|\psi_a(\sigma)\big| \leq c$ für alle $a > 0$ und $\sigma \in \mathbb{R}$. Dies folgt aus der Beschränktheit von φ. Daher existiert in (8) der Limes für $a \to \infty$, und es ist

$$(Hg)(t) \;=\; \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-it\sigma}\, \hat{g}(\sigma)\, \operatorname{sign}\sigma\, d\sigma \;=\; i\, F^{-1}(\hat{g}\, \operatorname{sign})(t)\,.$$

Damit ist der Beweis beendet. □

Folgerungen 4.14 *(a) Wir können die Aussage des Satzes auch formulieren als*

$$FHg \;=\; i\,\operatorname{sign} Fg \quad \textit{für alle } g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})\,,$$

d.h. im Fourierraum besteht $-iH$ einfach aus der Multiplikation mit der sogenannten Heavyside-Funktion sign.

(b) Für $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ ist

$$\begin{aligned} (Hf, Hg)_{L^2} &= (FHf, FHg)_{L^2} \;=\; \big(i\,\operatorname{sign}(Ff), i\,\operatorname{sign}(Fg)\big)_{L^2} \\ &= (Ff, Fg)_{L^2} \;=\; (f, g)_{L^2}\,. \end{aligned}$$

[3]Wissen Sie, wie man dies beweist? Hinweis: Benutzen Sie die Cauchysche Integralformel der Funktionentheorie für die Funktion $f(z) = e^{iz}/z$ im Gebiet $\big\{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}\, z| < a,\ 0 < \mathrm{Im}\, z < a,\ |z| > \varepsilon\big\}$ und lassen Sie erst ε gegen Null gehen und dann a gegen unendlich.

Also ist $\|Hf\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$ *, und* H *lässt sich ebenfalls zu einem unitären beschränkten Operator von* $L^2(\mathbb{R})$ *in sich fortsetzen. Außerdem gilt* $H^2 = -I$*, wie man sofort ausrechnet. Daher ist die Adjungierte* $H^* = -H$*, d.h.* H *ist schiefsymmetrisch.*

(c) Wegen $(F_1 g')(s) = -is\,(F_1 g)(s)$ *ist* $(F_1 H g')(s) = |s|\,(F_1 g)(s)$*. Diese Formel benutzen wir im nächsten Beweis.*

Nun können wir eine weitere Inversionsformel herleiten.

Satz 4.15 *Für* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ *gilt*

$$f \;=\; \frac{1}{4\pi}\, R^\sharp H \,\frac{\partial}{\partial s} Rf\,.$$

Beweis: Wir beginnen wieder mit der Inversionsformel für die Fouriertransformation und setzen dabei $\hat{f} = F_2 f$. Wir beschreiben das Gebietsintegral wieder in Polarkoordinaten $y = s\hat{\theta}$ und benutzen den Projektionssatz 4.10:

$$\begin{aligned} f(x) \;&=\; \frac{1}{2\pi} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-ix\cdot y} \hat{f}(y)\,dy \;=\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{S^1} \int\limits_0^\infty e^{-isx\cdot\hat{\theta}} \hat{f}(s\hat{\theta})\, s\,ds\,d\ell(\hat{\theta}) \\ &=\; \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{S^1} \int\limits_0^\infty e^{-isx\cdot\hat{\theta}} (F_{1,s} Rf)(\hat{\theta}, s)\, s\,ds\,d\ell(\hat{\theta})\,. \end{aligned}$$

Wir setzen zur Abkürzung $u(\hat{\theta}, s) = |s|\,(F_{1,s}Rf)(\hat{\theta}, s)$. Dann ist u gerade, denn $s \mapsto |s|$ und R sind gerade und die Fouriertransformation F_1 bildet gerade Funktionen in gerade Funktionen ab. Daher ist (ersetze s durch $-s$ im ersten Integral)

$$\int\limits_0^\infty e^{-isx\cdot\hat{\theta}} u(\hat{\theta}, s)\,ds \;=\; \int\limits_{-\infty}^0 e^{isx\cdot\hat{\theta}} u(\hat{\theta}, -s)\,ds \;=\; \int\limits_{-\infty}^0 e^{isx\cdot\hat{\theta}} u(-\hat{\theta}, s)\,ds\,,$$

also (ersetze $\hat{\theta}$ durch $-\hat{\theta}$)

$$\begin{aligned} \int\limits_{S^1} \int\limits_0^\infty e^{-isx\cdot\hat{\theta}} u(\hat{\theta}, s)\,ds\,d\ell(\hat{\theta}) \;&=\; \int\limits_{S^1} \int\limits_{-\infty}^0 e^{isx\cdot\hat{\theta}} u(-\hat{\theta}, s)\,ds\,d\ell(\hat{\theta}) \\ &=\; \int\limits_{S^1} \int\limits_{-\infty}^0 e^{-isx\cdot\hat{\theta}} u(\hat{\theta}, s)\,ds\,d\ell(\hat{\theta})\,, \end{aligned}$$

also

$$f(x) \;=\; \frac{1}{2\,(2\pi)^{3/2}} \int\limits_{S^1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-isx\cdot\hat\theta} u(\hat\theta, s)\, ds\, d\ell(\hat\theta)\,.$$

Mit Teil (b) der Folgerung 4.14 können wir u schreiben als

$$u(\hat\theta, s) \;=\; |s|\,(F_{1,s}Rf)(\hat\theta, s) \;=\; \big(F_{1,s}H\,\frac{\partial}{\partial s}Rf\big)(\hat\theta, s)\,.$$

Daher ist

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-isx\cdot\hat\theta} u(\hat\theta, s)\, ds \;=\; (F_{1,s}^{-1}u)(\hat\theta, x\cdot\hat\theta) \;=\; \big(H\frac{\partial}{\partial s}Rf\big)(\hat\theta, x\cdot\hat\theta)\,.$$

Integration bzgl $\hat\theta$ liefert die Behauptung des Satzes, denn

$$f(x) \;=\; \frac{1}{4\pi} \int\limits_{S^1} \big(H\frac{\partial}{\partial s}Rf\big)(\hat\theta, x\cdot\hat\theta)\, d\ell(\hat\theta) \;=\; \frac{1}{4\pi}\,\big(R^\sharp H\frac{\partial}{\partial s}Rf\big)(x)\,.$$

□

Jetzt wollen wir f und $g = Rf$ in Fourierreihen entwickeln. Dafür schreiben wir f in Polarkoordinaten, also $f = f(r, \varphi)$ und identifizieren den Einheitsvektor $\hat\theta \in S^1$ bei g mit dem Winkel θ, also $g = g(\theta, s)$. Wir setzen also an:

$$\begin{aligned} f(r,\varphi) \;&=\; \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_m(r)\, e^{im\varphi}\,, \quad r \ge 0\,,\; \varphi \in [0, 2\pi]\,, \\ g(\theta, s) \;&=\; \sum_{m\in\mathbb{Z}} g_m(s)\, e^{im\theta}\,, \quad s \in \mathbb{R}\,,\; \theta \in [0, 2\pi]\,. \end{aligned}$$

Da g eine gerade Funktion ist, folgt $g(\theta+\pi, -s) = g(\theta, s)$, d.h. $\sum_{m\in\mathbb{Z}} g_m(-s)\, e^{im(\theta+\pi)}$ $= \sum_{m\in\mathbb{Z}} g_m(s)\, e^{im\theta}$, d.h. $g_m(-s) = (-1)^m g_m(s)$ für alle $m \in \mathbb{Z}$ und $s \in \mathbb{R}$.

Wir wollen eine Beziehung zwischen $f_m(r)$ und $g_m(s)$ herleiten. In den folgenden Formeln tauchen die **Tschebyscheff-Polynome** T_m auf. Es gibt verschiedene Definitionen. Auf $[-1, 1]$ können sie durch $T_m(t) = \cos(m \arccos t)$ für alle $m = 0, 1, 2, \ldots$ definiert werden. Das Additionstheorem liefert $T_{m\pm1}(t) = \cos\big((m \pm 1) \arccos t\big) =$ $\cos(m \arccos t) \cos(\arccos t) \mp \sin(m \arccos t) \sin(\arccos t)$. Addition der beiden Ausdrücke und Ausnutzen von $\cos(\arccos t) = t$ ergibt

$$T_{m+1}(t) \;+\; T_{m-1}(t) \;=\; 2t\, T_m(t)\,, \quad m = 1, 2, 3, \ldots$$

Diese Formel, aufgelöst nach $T_{m+1}(t)$, kann zusammen mit $T_0(t) = 1$ und $T_1(t) = t$ als eine weitere Definition der Tschebyscheff-Polynome genommen werden. Insbesondere folgt hieraus, dass T_m wirklich ein Polynom vom Grad m ist. Ferner kann ganz einfach durch vollständige Induktion nach m gezeigt werden, dass T_m eine gerade Funktion ist für gerades m und ungerade ist für ungerades m.

Sei zunächst $s \geq 0$. Um $g(\cdot, s) = (Rf)(\cdot, s)$ in eine Fourierreihe zu entwickeln, setzen wir die Reihe $f(r, \varphi) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_m(r)\, e^{im\varphi}$ ein:

$$(Rf)(\theta, s) \;=\; \sum_{m\in\mathbb{Z}} \int\limits_{L_{\hat{\theta},s}} f_m(r)\, e^{im\varphi} d\ell(r, \varphi)\,.$$

Wir wollen die Gerade $L_{\hat{\theta},s}$ durch den Parameter φ parametrisieren. Sei $x \in L_{\hat{\theta},s}$. Der Punkt x habe die Polarkoordinaten (r, φ) und den Parameter t in der Parameterdarstellung $x = s\hat{\theta} + t\hat{\theta}^{\perp}$. Eine kleine geometrische Überlegung (Skizze!) liefert die Beziehungen

$$s \;=\; r\cos(\varphi - \theta)\,, \quad t \;=\; s\tan(\varphi - \theta)\,, \text{ also } \quad dt \;=\; \frac{s}{\cos^2(\varphi - \theta)}\, d\varphi\,.$$

Der Parameter φ läuft zwischen $\theta - \pi/2$ und $\theta + \pi/2$. Daher ist

$$\begin{aligned}
\int\limits_{L_{\hat{\theta},s}} f_m(r)\, e^{im\varphi} d\ell(r, \varphi) \;&=\; s \int\limits_{\theta-\pi/2}^{\theta+\pi/2} f_m\left(\frac{s}{\cos(\varphi - \theta)}\right) \frac{e^{im\varphi}}{\cos^2(\varphi - \theta)}\, d\varphi \\
&=\; s\, e^{im\theta} \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} f_m\left(\frac{s}{\cos\varphi}\right) \frac{e^{im\varphi}}{\cos^2\varphi}\, d\varphi \\
&=\; 2\, s\, e^{im\theta} \int\limits_{0}^{\pi/2} f_m\left(\frac{s}{\cos\varphi}\right) \frac{\cos(m\varphi)}{\cos^2\varphi}\, d\varphi\,.
\end{aligned}$$

Zunächst können wir $\cos(m\varphi)$ durch $\cos(|m|\varphi)$ ersetzen, da cos gerade ist. Wir führen jetzt die Variablentransformation $\cos\varphi = t$ ein, die das Intervall $[0, \pi/2]$ bijektiv auf $[0, 1]$ abbildet. Dann ist $\cos(|m|\varphi) = \cos(|m| \arccos t) = T_{|m|}(t)$ mit dem

Tschebyscheff-Polynom $T_{|m|}$ vom Grad $|m|$. Daher ist wegen $d\varphi = -dt/\sqrt{1-t^2}$

$$\int\limits_{L_{\hat{\theta},s}} f_m(r)\, e^{im\varphi} d\ell \;=\; 2\, s\, e^{im\theta} \int\limits_0^1 f_m\left(\frac{s}{t}\right) T_{|m|}(t)\, \frac{1}{t^2}\, \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$\;=\; 2\, e^{im\theta} \int\limits_s^\infty T_{|m|}\left(\frac{s}{r}\right) \frac{1}{\sqrt{1-s^2/r^2}}\, f_m(r)\, dr\,,$$

wobei wir hier $t = s/r$ ersetzt haben. Der Vergleich mit der Darstellung für $g(\theta, s)$ liefert

$$g_m(s) \;=\; 2 \int\limits_s^\infty T_{|m|}\left(\frac{s}{r}\right) \frac{1}{\sqrt{1-s^2/r^2}}\, f_m(r)\, dr \quad \text{für } s \geq 0\,.$$

Für $s < 0$ nutzen wir $g_m(s) = (-1)^m g_m(-s)$ aus, also

$$g_m(s) \;=\; 2 \int\limits_{-s}^\infty \underbrace{T_{|m|}\left(\frac{-s}{r}\right)(-1)^m}_{=\,T_{|m|}(s/r)} \frac{1}{\sqrt{1-s^2/r^2}}\, f_m(r)\, dr\,.$$

Daher haben wir den ersten Teil des folgenden Satzes schon bewiesen.

Satz 4.16 *(Cormacksche Umkehrformel)*

Für $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ und $g = Rf$ in der Form

$$f(r,\varphi) \;=\; \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_m(r)\, e^{im\varphi}\,, \quad r \geq 0\,,\ \varphi \in [0, 2\pi]\,,$$

$$g(\theta,s) \;=\; \sum_{m\in\mathbb{Z}} g_m(s)\, e^{im\theta}\,, \quad s \in \mathbb{R}\,,\ \theta \in [0, 2\pi]\,,$$

gilt

$$g_m(s) \;=\; 2 \int\limits_{|s|}^\infty T_{|m|}\left(\frac{s}{r}\right) \frac{1}{\sqrt{1-s^2/r^2}}\, f_m(r)\, dr \quad \textit{für } s \in \mathbb{R}\,,\ m \in \mathbb{Z}\,,$$

$$f_m(r) \;=\; -\frac{1}{\pi} \int\limits_r^\infty T_{|m|}\left(\frac{s}{r}\right) \frac{1}{\sqrt{s^2-r^2}}\, g_m'(s)\, ds \quad \textit{für } r \geq 0\,,\ m \in \mathbb{Z}\,.$$

Beweis der zweiten Formel: Wir multiplizieren die erste Formel mit

$$\frac{\tau\, T_{|m|}\left(\frac{s}{\tau}\right)}{s\sqrt{s^2-\tau^2}}$$

für ein $\tau > 0$ und integrieren bzgl. s von τ bis ∞. Diese ergibt

$$\int_\tau^\infty g_m(s)\, \frac{\tau\, T_{|m|}\left(\frac{s}{\tau}\right)}{s\sqrt{s^2-\tau^2}}\, ds \;=\; 2\int_\tau^\infty \int_s^\infty \frac{\tau\, r\, T_{|m|}\left(\frac{s}{r}\right) T_{|m|}\left(\frac{s}{\tau}\right)}{s\sqrt{s^2-\tau^2}\sqrt{r^2-s^2}}\, f_m(r)\, dr\, ds\,.$$

Vertauschung der Integrationsreihenfolge liefert

$$\int_\tau^\infty g_m(s)\, \frac{\tau\, T_{|m|}\left(\frac{s}{\tau}\right)}{s\sqrt{s^2-\tau^2}}\, ds \;=\; 2\int_\tau^\infty \int_\tau^r \frac{\tau\, r\, T_{|m|}\left(\frac{s}{r}\right) T_{|m|}\left(\frac{s}{\tau}\right)}{s\sqrt{s^2-\tau^2}\sqrt{r^2-s^2}}\, ds\, f_m(r)\, dr\,.$$

Wir benutzen ohne Beweis, dass

$$\int_\tau^r \frac{\tau\, r\, T_{|m|}\left(\frac{s}{r}\right) T_{|m|}\left(\frac{s}{\tau}\right)}{s\sqrt{s^2-\tau^2}\sqrt{r^2-s^2}}\, ds \;=\; \frac{\pi}{2} \quad \text{für alle } r > \tau\,.$$

Damit haben wir gezeigt, dass

$$\int_\tau^\infty g_m(s)\, \frac{\tau\, T_{|m|}\left(\frac{s}{\tau}\right)}{s\sqrt{s^2-\tau^2}}\, ds \;=\; \pi \int_\tau^\infty f_m(r)\, dr\,.$$

Auf der linken Seite substituieren wir noch $s = \sigma\tau$ und erhalten

$$\pi \int_\tau^\infty f_m(r)\, dr \;=\; \int_1^\infty g_m(\tau\sigma)\, \frac{T_{|m|}(\sigma)}{\sigma\sqrt{\sigma^2-1}}\, d\sigma\,.$$

Differentiation bzgl τ und Rücksubstitution $s = \sigma\tau$ ergibt

$$-\pi\, f_m(\tau) \;=\; \int_1^\infty g_m'(\tau\sigma)\, \frac{T_{|m|}(\sigma)}{\sqrt{\sigma^2-1}}\, d\sigma \;=\; \int_\tau^\infty g_m'(s)\, \frac{T_{|m|}\left(\frac{s}{\tau}\right)}{\sqrt{s^2-\tau^2}}\, ds\,.$$

$\square$

4.4 Identifizierbarkeit bei eingeschränkten Daten

Die Inversionsformeln vom letzten Abschnitt beweisen insbesondere, dass die Lösung f von $Rf = g$ eindeutig bestimmt ist, falls g für alle Geraden $L_{\hat\theta,s}$ bekannt ist. Wie sieht es aus, wenn g nicht auf allen Geraden gegeben ist? Zwei Ergebnisse zeigen wir in diesem Abschnitt.

Satz 4.17 *Sei $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ und $K \subset \mathbb{R}^2$ konvex und kompakt. Falls $(Rf)(\hat\theta, s) = 0$ für alle Geraden $L_{\hat\theta,s}$, die K nicht schneiden, so ist $f = 0$ im Äußeren von K.*

Beweis: Sei zunächst K eine Kreisscheibe mit Radius $a > 0$. Wir wählen das Koordintensystem so, dass der Ursprung gerade der Mittelpunkt des Kreises ist. Es seien wieder f und $g = Rf$ in Form von Fourierreihen dargestellt, d.h.

$$\begin{aligned} f(r,\varphi) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} f_m(r)\, e^{im\varphi}\,, \quad r \geq 0\,,\ \varphi \in [0,2\pi]\,, \\ g(\theta,s) &= \sum_{m\in\mathbb{Z}} g_m(s)\, e^{im\theta}\,, \quad s \in \mathbb{R}\,,\ \theta \in [0,2\pi]\,. \end{aligned}$$

Die Bedingung $(Rf)(\hat{\theta},s) = 0$ für alle Geraden $L_{\hat{\theta},s}$, die K nicht schneiden, impliziert $g_m(s) = 0$ für alle $|s| > a$ und alle $m \in \mathbb{Z}$. Die zweite Formel von Satz 4.16 liefert $f_m(r) = 0$ für alle $r > a$ und alle $m \in \mathbb{Z}$, d.h. $f(r,\varphi) = 0$ für alle $r > a$. Damit ist der Satz für Kreisscheiben bewiesen.

Sei jetzt $K \subset \mathbb{R}^2$ eine beliebige kompakte und konvexe Menge und $x \notin K$. Wir können eine Kreisscheibe $\tilde{K}$ finden mit $K \subset \tilde{K}$ und $x \notin \tilde{K}$.[4] Jetzt gilt insbesondere $(Rf)(\hat{\theta},s) = 0$ für alle Geraden $L_{\hat{\theta},s}$, die $\tilde{K}$ nicht schneiden. Nach dem ersten Teil ist dann $f(x) = 0$. $\square$

Bemerkung: Die Aussage des Satzes wird falsch, wenn f nicht schnell genug abfällt. Wir betrachten folgendes Beispiel:

Beispiel: Wir identifizieren $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$, also $\hat{\theta} \cong e^{i\theta}$ und $\hat{\theta}^\perp \cong ie^{i\hat{\theta}}$, also

$$(Rf)(\hat{\theta},s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(s\,e^{i\theta} + it\,e^{i\theta})\,dt\,, \quad \theta \in [0,2\pi]\,,\ s \in \mathbb{R}\,.$$

Wir substituieren $z = (s+it)e^{i\theta}$ und erhalten mit $dz = ie^{i\theta}dt$ das komplexe Linienintegral

$$(Rf)(\hat{\theta},s) = -i\,e^{-i\theta} \int_{L_{\hat{\theta},s}} f(z)\,dz\,.$$

Wähle jetzt $p \in \mathbb{N}$ und eine Funktion $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$ mit $\psi(t) = 0$ für $|t| \leq 1/2$ und $\psi(t) = 1$ für $|t| \geq 1$ und setze $f(z) = \psi(|z|^2)z^{-p}$ für $z \in \mathbb{C}$. Dann ist $\mathrm{Re}f$, aufgefasst als Funktion von $\mathbb{R}^2$ nach $\mathbb{R}$ unendlich oft differenzierbar und f holomorph außerhalb der Einheitskreisscheibe.

[4]Weshalb geht dies? Hinweis: Man betrachte die orthogonale Projektion $z \in K$ von x in K und einen geeigneten Kreis mit Mittelpunkt auf der Geraden durch x und z.

Sei $|s| > 1$, d.h. die Gerade $L_{\hat{\theta},s}$ schneidet nicht die Einheitskreisscheibe. Auf dieser Geraden ist also $f(z) = z^{-p}$. Dann ist mit der Transformation $w = 1/z$ und $dw = -w^2 dz$:

$$(Rf)(\hat{\theta}, s) \;=\; -i\, e^{-i\theta} \int\limits_{L_{\hat{\theta},s}} z^{-p}\, dz \;=\; i\, e^{-i\theta} \int\limits_{C_{\hat{\theta},s}} w^{p-2}\, dw \;.$$

Hier ist $C_{\hat{\theta},s}$ das Bild der Geraden $L_{\hat{\theta},s}$ unter der Abbildung $z \mapsto 1/z$. Es ist leicht zu sehen, dass $C_{\hat{\theta},s}$ der Kreis ist, der durch

$$\left| w - \frac{1}{2s}\, e^{-i\theta} \right| \;=\; \frac{1}{4s^2}$$

beschrieben wird. Da für $p \geq 2$ die Funktion $w \mapsto w^{p-2}$ holomorph ist, so verschwindet das Integral nach dem Cauchyschen Integralsatz, d.h. $(Rf)(\hat{\theta}, s) = 0$ für alle $s \geq 1$ und daher auch $R(\mathrm{Re} f)(\hat{\theta}, s) = \mathrm{Re}[(Rf)(\hat{\theta}, s)] = 0$. Trotzdem ist $\mathrm{Re} f$ nicht die Nullfunktion! Daher kann auf eine geeignete Abklingbedingung an f für die Eindeutigkeitssätze nicht verzichtet werden!

Satz 4.18 *Sei $\Gamma \subset S^1$ offen*[5] *und $C \subset \mathbb{R}^2$ eine Kurve, parametrisiert durch die stetig differenzierbare Funktion γ, d.h. $x = \gamma(s)$, $a \leq s \leq b$. Es sei ferner $U \subset \mathbb{R}^2$ offen und beschränkt, und die folgende Voraussetzung gelte: Zu jedem $\hat{\theta} \in \Gamma$ gebe es ein $z \in C$, so dass der Strahl mit Spitze in z und Richtung $\hat{\theta}$ die Menge U nicht schneidet. Dies bedeutet: $\{z + t\hat{\theta} : t \geq 0\} \cap U = \emptyset$.*

Sei schließlich $f \in C_0^\infty(U)$ mit

$$(Df)(\hat{\theta}, z) \;:=\; \int\limits_0^\infty f(z + t\hat{\theta})\, dt \;=\; 0 \quad \textit{für alle } z \in C \textit{ und } \hat{\theta} \in \Gamma\,.$$

Dann ist $f = 0$ in der „Messregion“ $\{z + t\hat{\theta} : t \geq 0,\; z \in C,\; \hat{\theta} \in \Gamma\}$.

Beweis: Für $n \in \mathbb{N}_0$ definieren wir den Operator D_n durch

$$(D_n f)(y, z) \;:=\; \int\limits_0^\infty t^n\, f(z + ty)\, dt\,, \quad z, y \in \mathbb{R}^2\,.$$

Wir zeigen durch vollständige Induktion nach n, dass $(D_n f)(\hat{\theta}, z) = 0$ für alle $z \in C$ und $\hat{\theta} \in \Gamma$.

[5] d.h. $\Gamma = \mathcal{O} \cap S^1$ mit einer offenen Menge $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^2$

Für $n = 0$ wird dies gerade vorausgesetzt.

Sei also jetzt $(D_n f)(\hat{\theta}, z) = 0$ für alle $z \in C$ und $\hat{\theta} \in \Gamma$. Dann ist auch $(D_n f)(y, z) = 0$ für alle $z \in C$ und alle $y \in K$, wobei K der Kegel $\big\{y \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} : y/|y| \in \Gamma\big\}$ ist. Dies folgt wegen

$$(D_n f)(y, z) \;=\; \int\limits_0^\infty t^n\, f\left(z + t|y|\frac{y}{|y|}\right) dt \;=\; \frac{1}{|y|^{n+1}} \int\limits_0^\infty \tilde{t}^n\, f\left(z + \tilde{t}\frac{y}{|y|}\right) d\tilde{t}$$

aus der Substitutionsregel ($\tilde{t} = |y|t$). Wir rechnen aus:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{ds}(D_{n+1} f)\big(y, \gamma(s)\big) \;&=\; \frac{d}{ds} \int\limits_0^\infty t^{n+1}\, f\big(\gamma(s) + ty\big)\, dt \\
&=\; \int\limits_0^\infty t^{n+1} \left[\gamma'(s) \cdot \nabla f\big(\gamma(s) + ty\big)\right] dt \\
&=\; \gamma'(s) \cdot \nabla_y (D_n f)\big(y, \gamma(s)\big) \;=\; 0\,.
\end{aligned}$$

Also ist $(D_{n+1} f)(\hat{\theta}, \cdot)$ konstant auf C für jedes $\hat{\theta} \in \Gamma$. Nach Voraussetzung gibt es zu jedem $\hat{\theta} \in \Gamma$ ein $z \in C$ so, dass $z + t\hat{\theta} \notin U$ für alle $t \geq 0$. Daher ist $f(z + t\hat{\theta}) = 0$ für alle $t \geq 0$, d.h. $(D_{n+1} f)(\hat{\theta}, z) = 0$.

Setzen wir für festes $z \in C$ und $\hat{\theta} \in \Gamma$ zur Abkürzung $\rho(t) = f(z + t\hat{\theta})$, $t \geq 0$, und wählen $T > 0$ groß genug, so haben wir $\int_0^T t^n \rho(t)\, dt = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Hieraus folgt $\rho = 0$ (Beweis durch Approximation von ρ durch Polynome, verbleibt als Übung).

□

4.5 Ein singuläres System für die Radontransformation

Wir betrachten jetzt den Fall, dass alle auftretenden Funktionen ausserhalb der Einheitskreisscheibe $B = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ verschwinden. Damit können wir die Integrationsgrenzen bei der Radontransformation angeben, und es ist

$$(Rf)(\hat{\theta}, s) \;=\; \int\limits_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} f(s\hat{\theta} + t\hat{\theta}^\perp)\, dt\,, \quad \hat{\theta} \in S^1,\; s \in [-1, +1]\,.$$

Bisher haben wir R nur auf dem dichten Raum $\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ betrachtet und noch keine Beschränktheits- oder Kompaktheitsaussage von R zwischen Hilberträumen gemacht.

Sei $Z = S^1 \times [-1,+]$ der Zylinder des Bildbereichs. Es ist einfacher, an Stelle von $L^2(Z)$ einen gewichteten Raum als Bildbereich zu nehmen. Sei also $w(s) = (1-s^2)^{-1/2}$ für $|s| < 1$ und $L^2(Z,w)$ die Vervollständigung von $C_0^\infty(Z)$ bzgl. der Norm

$$\|g\|_{L^2(Z,w)} \;=\; \left[\int\limits_{S^1}\int\limits_{-1}^{1} \big|g(\hat\theta,s)\big|^2 w(s)\,ds\,d\ell(\hat\theta)\right]^{1/2}.$$

Der Raum $L^2(Z,w)$ ist „kleiner“ als $L^2(Z)$ und die Einbettung $L^2(Z,w) \hookrightarrow L^2(Z)$ ist beschränkt. Dies folgt wegen $w(s) \ge 1$ aus der Abschätzung

$$\|g\|^2_{L^2(Z)} \;=\; \int\limits_{S^1}\int\limits_{-1}^{1} \big|g(\hat\theta,s)\big|^2\,ds\,d\ell(\hat\theta) \;\le\; \int\limits_{S^1}\int\limits_{-1}^{1} \big|g(\hat\theta,s)\big|^2 w(s)\,ds\,d\ell(\hat\theta) \;=\; \|g\|^2_{L^2(Z,w)}\,.$$

Satz 4.19 *Der Operator R ist wohldefiniert und beschränkt als Operator von $L^2(B)$ nach $L^2(Z,w)$.*

Beweis: Es ist mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung

$$\big|(Rf)(\hat\theta,s)\big|^2 \;=\; \left|\int\limits_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} f(s\hat\theta + t\hat\theta^\perp)\,dt\right|^2 \;\le\; 2\sqrt{1-s^2}\int\limits_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \big|f(s\hat\theta + t\hat\theta^\perp)\big|^2\,dt\,,$$

also

$$\int\limits_{-1}^{1} \big|(Rf)(\hat\theta,s)\big|^2 w(s)\,ds \;\le\; 2\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \big|f(s\hat\theta + t\hat\theta^\perp)\big|^2\,dt \;=\; 2\iint\limits_{B} \big|f(x)\big|^2 dx$$

und daher

$$\|Rf\|^2_{L^2(Z,w)} \;\le\; 4\pi\,\|f\|^2_{L^2(B)}\,.$$

$\square$

Die Adjungierte von R bzgl. den Räumen $L^2(B)$ und $L^2(Z,w)$ bezeichnen wir mit R^*. Genauso einfach wie Satz 4.11 lässt sich zeigen:

Satz 4.20 *Die Adjungierte $R^* : L^2(Z,w) \to L^2(B)$ von $R : L^2(B) \to L^2(Z,w)$ ist gegeben durch*

$$(R^*g)(x) \;=\; \int\limits_{S^1} g(\hat\theta, x\cdot\hat\theta)\,w(x\cdot\hat\theta)\,d\ell(\hat\theta)\,, \quad x \in B\,.$$

Wir verzchten auf den Beweis.

Für die Berechnung eines singulären Systems müssen wir die Eigenwerte und Eigenfunktionen von R^*R berechnen. Wir können dies auch für RR^* tun – und dies ist einfacher. Es ist

$$
\begin{aligned}
(R\,R^*g)(\hat\theta, s) &= \int\limits_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} (R^*g)(s\hat\theta + t\hat\theta^\perp)\, dt \\
&= \int\limits_{S^1} \int\limits_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} g\big(\hat\varphi, (s\hat\theta + t\hat\theta^\perp)\cdot\hat\varphi\big)\, w\big((s\hat\theta + t\hat\theta^\perp)\cdot\hat\varphi\big)\, dt\, d\ell(\hat\varphi)\,. \qquad (9)
\end{aligned}
$$

Wir rechnen aus mit $\hat\theta = \binom{\cos\theta}{\sin\theta}$ und analog $\hat\varphi = \binom{\cos\varphi}{\sin\varphi}$: $(s\hat\theta + t\hat\theta^\perp)\cdot\hat\varphi = \cdots = s\cos(\theta-\varphi) + t\sin(\theta-\varphi)$, also

$$
(R\,R^*g)(\hat\theta, s) \;=
$$

$$
= \int\limits_0^{2\pi} \left[\int\limits_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} g\big(\varphi, s\cos(\theta-\varphi) + t\sin(\theta-\varphi)\big)\, w\big(s\cos(\theta-\varphi) + t\sin(\theta-\varphi)\big)\, dt \right] d\varphi\,.
$$

Wir halten jetzt φ und θ fest, setzen $\psi = \varphi - \theta$ und betrachten zunächst den Integraloperator

$$
(A_\psi h)(s) \;:=\; \int\limits_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} h(s\cos\psi + t\sin\psi)\, dt\,, \quad s \in [-1,1]\,.
$$

Wir erkennen den Zusammenhang mit $R\,R^*$: Es ist

$$
(R\,R^*g)(\hat\theta, s) \;=\; \int\limits_0^{2\pi} (A_{\theta-\varphi} h_\varphi)(s)\, d\varphi
$$

mit $h_\varphi(\sigma) = g(\varphi, \sigma)\, w(\sigma)$.

Satz 4.21 *Der Operator A_ψ ist beschränkt von $L^2(-1,1)$ in sich und selbstadjungiert.*

Beweis: (a) Beschränktheit: Mit der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ist

$$\begin{aligned}\left|(A_\psi h)(s)\right|^2 &\le 2\sqrt{1-s^2}\int\limits_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \left|h(s\cos\psi + t\sin\psi)\right|^2 dt \\ &\le 2\int\limits_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \left|h(s\cos\psi + t\sin\psi)\right|^2 dt\,,\end{aligned}$$

also

$$\int\limits_{-1}^{1} \left|(A_\psi h)(s)\right|^2 ds \;\le\; 2\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} \left|h\Big(\binom{s}{t}\cdot\hat\psi\Big)\right|^2 dt\,ds \;=\; 2\iint\limits_B \left|h(x\cdot\hat\psi)\right|^2 dx$$

mit $\hat\psi = \binom{\cos\psi}{\sin\psi}$. Jetzt benutzen wir die Transformationsformel und setzen $x = \begin{pmatrix}\cos\psi & \sin\psi\\ \sin\psi & -\cos\psi\end{pmatrix} y$. Dann ist $x\cdot\hat\psi = y_1$, also

$$\begin{aligned}\int\limits_{-1}^{1} \left|(A_\psi h)(s)\right|^2 ds &\le 2\iint\limits_B \left|h(y_1)\right|^2 dy \;=\; 2\int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-y_1^2}}^{\sqrt{1-y_1^2}} \left|h(y_1)\right|^2 dy_2\,dy_1 \\ &= 4\int\limits_{-1}^{1} \sqrt{1-y_1^2}\,\left|h(y_1)\right|^2 dy_1 \;\le\; 4\,\|h\|^2_{L^2(-1,1)}\,,\end{aligned}$$

Die Selbstadjungiertheit zeigt man mit derselben Transformation:

$$\begin{aligned}(A_\psi h, g)_{L^2(-1,1)} &= \int\limits_{-1}^{1}\int\limits_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} h(s\cos\psi + t\sin\psi)\,dt\,g(s)\,ds \\ &= \iint\limits_B h(x\cdot\hat\psi)\,g(x_1)\,dx \;=\; \iint\limits_B h(y_1)\,g(y\cdot\hat\psi)\,dy \\ &= (h, A_\psi g)_{L^2(-1,1)}\,.\end{aligned}$$

□

Wir benötigen jetzt die **Tschebyscheff-Polynome der 2. Art**. Auf dem Intervall $[-1,1]$ können sie definiert werden durch

$$U_n(t) \;=\; \frac{\sin\big((n+1)\arccos t\big)}{\sin(\arccos t)}\,,\quad |t|\le 1\,,\; n = 0,1,2,\ldots$$

Es ist $U_0(t) = 1$ und $U_1(t) = 2t$ wegen $\sin(2s) = 2\sin s\,\cos s$. Aus $\sin\big((n+1)s\big) - \sin\big((n-1)s\big) = 2\sin(ns)\cos s$ folgt die Rekursionsformel

$$U_n(t) \;-\; U_{n-2}(t) \;=\; 2t\,U_{n-1}(t)\,, \quad n \geq 2\,,$$

woraus man wieder erkennt, dass U_n ein Polynom vom Grad n ist. Wir benötigen die folgende Orthogonalitätseigenschaft:

$$\int_{-1}^{1} U_n(t)\,U_m(t)\,\sqrt{1-t^2}\,dt \;=\; \begin{cases} \frac{\pi}{2}\,, & n = m\,, \\ 0\,, & n \neq m\,. \end{cases} \tag{10}$$

Dies sieht man durch die Substitution $t = \cos s$, denn

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} U_n(t)\,U_m(t)\,\sqrt{1-t^2}\,dt \;&=\; \int_0^{\pi} \frac{\sin\big((n+1)s\big)}{\sin s}\,\frac{\sin\big((m+1)s\big)}{\sin s}\,\sin s\,\sin s\,ds \\ &=\; \int_0^{\pi} \sin\big((n+1)s\big)\,\sin\big((m+1)s\big)\,ds \\ &=\; \begin{cases} \frac{\pi}{2}\,, & n = m\,, \\ 0\,, & n \neq m\,. \end{cases} \end{aligned}$$

Also bildet die Menge $\{U_n : n = 0, 1, \ldots, N\}$ ein Orthogonalsystem im Raum $\mathcal{P}_N(-1,1)$ aller Polynome auf $[-1,1]$ vom Grad $\leq N$ bzgl. des Skalarprodukts

$$(f,g) \;=\; \int_{-1}^{1} \sqrt{1-s^2}\,f(s)\,g(s)\,ds\,.$$

Wir berechnen $A_\psi U_m$:

$$\begin{aligned} (A_\psi U_m)(s) \;&=\; \int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} U_m(s\cos\psi + t\sin\psi)\,dt \quad \text{(substituiere } t = u\sqrt{1-s^2}\text{)} \\ &=\; \sqrt{1-s^2}\int_{-1}^{1} U_m\big(s\cos\psi + u\sqrt{1-s^2}\sin\psi\big)\,du \\ &=\; \sqrt{1-s^2}\,P_m(s) \end{aligned} \tag{11}$$

mit einem Polynom P_m vom Grad m. Dies sieht man so: $U_m(\tau)$ ist eine Linearkombination von Monomen τ^k. Als Integrand treten also Linearkombination auf von

$$\big(s\cos\psi + u\sqrt{1-s^2}\sin\psi\big)^k \;=\; \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j}\, s^{k-j}(\cos^{k-j}\psi)\,(1-s^2)^{j/2}(\sin^j\psi)\,u^j\,.$$

Bei der Integration bzgl. u fallen die Terme mit ungeradem j weg (Integrationsgebiet ist symmetrisch um den Nullpunkt!). Daher ist dieser Ausdruck ein Polynom bzgl. s vom Grad höchstens k.

Wir entwickeln P_m nach den Funktionen $\{U_k : k \leq m\}$, also

$$P_m \;=\; \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \, U_j$$

mit gewissen Koeffizienten $\alpha_j \in \mathbb{R}$. Für $n > m$ folgt

$$\begin{aligned}\big(A_\psi U_m, U_n\big)_{L^2(-1,1)} \;&=\; \int_{-1}^{1} \sqrt{1-s^2}\, P_m(s)\, U_n(s)\, ds \\ &=\; \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \int_{-1}^{1} \sqrt{1-s^2}\, U_j(s)\, U_n(s)\, ds \;=\; 0\end{aligned}$$

wegen der Orthogonalität der $\{U_n : n \geq 0\}$. Da A_ψ selbstadjungiert ist, so gilt dies auch für $n < m$. Durch Multiplikation von $P_m = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j \, U_j$ mit $\sqrt{1-s^2} U_k(s)$ und Integration erkennt man, dass in der Summe $\sum\limits_{j=0}^{m} \alpha_j \, U_j$ alle Glieder bis auf das $m-$te wegfallen. Daher hat man die Darstellung

$$(A_\psi U_m)(s) \;=\; \alpha_m(\psi)\, \sqrt{1-s^2}\, U_m(s)\,,$$

d.h. wegen (11)

$$\int_{-1}^{1} U_m\big(s\cos\psi + u\sqrt{1-s^2}\sin\psi\big)\, du \;=\; \alpha_m(\psi)\, U_m(s)\,.$$

Es ist noch die Konstante $\alpha_m(\psi)$ zu bestimmen. Dies machen wir, indem wir den Fall $s \to 1$ betrachten: Die letzte Gleichung geht über in $2\, U_m(\cos\psi) \;=\; \alpha_m(\psi)\, U_m(1)$. Wegen $U_m(1) = m+1$ folgt also $\alpha_m(\psi) = \frac{2}{m+1}\, U_m(\cos\psi)$ und daher als Resultat

$$(A_\psi U_m)(s) \;=\; \frac{2}{m+1}\, \sqrt{1-s^2}\, U_m(\cos\psi)\, U_m(s)\,.$$

Jetzt können wir ein singuläres System angeben. Wir setzen

$$g_{mn}(\varphi,\tau) \;=\; \frac{1}{\pi}\, \sqrt{1-\tau^2}\, U_m(\tau)\, e^{in\varphi}\,, \quad |\tau| \leq 1\,,\; \varphi \in [0, 2\pi]\,.$$

Diese Funktionen sind in $L^2(Z,w)$ orthonormiert, denn

$$\begin{aligned}
(g_{mn}, g_{m'n'})_{L^2(Z,w)} &= \frac{1}{\pi^2}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{1} U_m(\tau)\,U_{m'}(\tau)\,\sqrt{1-\tau^2}\,d\tau\, e^{i(n-n')\varphi} d\varphi \\
&= \delta_{n,n'}\,\frac{2}{\pi}\int_{-1}^{1} U_m(\tau)\,U_{m'}(\tau)\,\sqrt{1-\tau^2}\,d\tau \;=\; \delta_{n,n'}\,\delta_{m,m'}
\end{aligned}$$

mit dem Symbol $\delta_{n,n'} = \begin{cases} 0, & n \not= n', \\ 1, & n = n'. \end{cases}$.

Mit (9) rechnen wir aus:

$$\begin{aligned}
(R\,R^* g_{mn})(\theta,s) &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} e^{in\varphi}\,U_m\big(s\cos(\varphi-\theta)+t\sin(\varphi-\theta)\big)\,dt\,d\varphi \\
&= \frac{1}{\pi}\,e^{in\theta}\int_0^{2\pi} e^{in\varphi}\underbrace{\int_{-\sqrt{1-s^2}}^{\sqrt{1-s^2}} U_m(s\cos\varphi + t\sin\varphi)\,dt\;d\varphi}_{=\,(A_\varphi U_m)(s)} \\
&= \frac{1}{\pi}\,\frac{2}{m+1}\,\sqrt{1-s^2}\,e^{in\theta}\int_0^{2\pi} e^{in\varphi}\,U_m(\cos\varphi)\,d\varphi\,U_m(s) \\
&= \mu_{mn}^2\,g_{mn}(\theta,s)
\end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned}
\mu_{mn}^2 &= \frac{2}{m+1}\int_0^{2\pi} e^{in\varphi}\,U_m(\cos\varphi)\,d\varphi \;=\; \frac{2}{m+1}\int_0^{2\pi}\cos(n\varphi)\,\frac{\sin\big((m+1)\varphi\big)}{\sin\varphi}\,d\varphi \\
&= \frac{4\pi}{m+1}\cdot\begin{cases} 1\,, & m+n \text{ gerade}, \ |n| \le m\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}
\end{aligned}$$

Setzen wir schließlich noch $I := \big\{(m,n) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{Z} : |n| \le m,\ n+m \text{ gerade}\big\}$ und $f_{mn} = \mu_{mn}^{-1} R^* g_{mn}$ für $(m,n) \in I$, so haben wir ein singuläres System $\big\{\mu_{mn}, f_{mn}, g_{mn} : (m,n) \in I\big\}$ bestimmt. Die Singulärwertzerlegungen lauten:

$$\begin{aligned}
Rf &= \sqrt{4\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\tfrac{1}{\sqrt{m+1}}\sum_{\substack{n=-m \\ n+m \text{ gerade}}}^{m} (f, f_{mn})_{L^2(B)}\,g_{mn}\,, \\
R^* g &= \sqrt{4\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\tfrac{1}{\sqrt{m+1}}\sum_{\substack{n=-m \\ n+m \text{ gerade}}}^{m} (g, g_{mn})_{L^2(Z,w)}\,f_{mn}\,.
\end{aligned}$$

Der Satz von Picard besagt, dass $Rf = g$ genau dann lösbar ist, wenn g senkrecht auf dem Nullraum von R^* ist und wenn

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m+1} \sum_{\substack{n=-m \\ n+m \text{ gerade}}}^{m} \left|(g, g_{mn})_{L^2(Z,w)}\right|^2 \; < \; \infty \,.$$

Offenbar ist der Nullraum $\mathcal{N}(R^*)$ von R^* gegeben durch

$$\mathcal{N}(R^*) \; = \; \operatorname{span}\left\{g_{mn} : |n| > m \text{ oder } n+m \text{ ungerade}\right\}.$$

Daher sind die Bedingungen an die Lösbarkeit von $Rf = g$ äquivalent zu

$$g \; = \; \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{\substack{n=-m \\ n+m \text{ gerade}}}^{m} \alpha_{mn}\, g_{mn} \quad \text{mit} \quad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m+1} \sum_{\substack{n=-m \\ n+m \text{ gerade}}}^{m} \left|\alpha_{mn}\right|^2 \; < \; \infty \,.$$

Da die Singulärwerte μ_{mn} gegen Null konvergieren, ist die Gleichung $Rf = g$ schlecht gestellt und eine Regularisierung erforderlich.