Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Karlsruhe, den 29. Oktober 2015

Prof. Dr. Andreas Kirsch
Julian Ott
Uwe Zeltmann

1. Übung zur Vorlesung Inverse Probleme
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 1: Seien X und Y normierte Vektorräume und $A : X \to Y$ ein linearer Operator. Zeigen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:

(a) A ist beschränkt.

(b) A ist stetig in $x = 0$.

(c) A ist stetig.

Lösung 1:

- „(c) $\Rightarrow$ (b)“: Sei A stetig. Dann ist A stetig in jedem Punkt $x \in X$, also insbesondere in $x = 0$.
- „(b) $\Rightarrow$ (a)“: Sei A stetig in $x = 0$. Dann existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $x \in X$ mit $\|x\| = \|x-0\| \le \delta$ gilt: $\|Ax\| = \|Ax-0\| = \|Ax-A0\| \le 1$. Folglich ist für jedes $x \in X\setminus\{0\}$:
$$\|Ax\| \;=\; \frac{1}{\delta}\left\| A \underbrace{\frac{\delta x}{\|x\|}}_{\|\;\|=\delta} \right\| \|x\| \;\le\; \frac{1}{\delta}\|x\|\,,$$
womit A als beschränkt erkannt ist mit $\|A\| \le \frac{1}{\delta}$.
- „(a) $\Rightarrow$ (c)“: Sei A beschränkt mit Norm $\|A\|$, $x \in X$ beliebig und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in X mit $x_n \to x,\ n \to \infty$. Dann gilt
$$\|Ax_n - Ax\| \;=\; \|A(x_n - x)\| \;\le\; \|A\|\,\|x_n - x\| \;\longrightarrow\; 0$$
für $n \to \infty$. Also ist A stetig in x.

Aufgabe 2:

(a) Zeigen Sie, dass ein normierter Vektorraum $(X, \|\,.\,\|)$ über $\mathbb{R}$ genau dann ein Prähilbertraum ist, wenn für alle $x, y \in X$ die Parallelogrammgleichung:
$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\,(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$
erfüllt ist.

Hinweis: Weisen Sie in der Rückrichtung des Beweises nach, dass
$$b(x, y) := \left\|\frac{x + y}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x - y}{2}\right\|^2$$
ein Skalarprodukt ist.

Dieser Satz gilt auch für normierte Räume über $\mathbb{C}$.

(b) Ist $(C[0, 1], \|\,.\,\|_\infty)$ ein Hilbertraum?

Lösung 2:

(a)„$\Rightarrow$“: Sei X ein Prähilbertraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot\,, \cdot \rangle$ und $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, $x \in X$. Dann gilt für $x, y \in X$:

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y,\, x+y\rangle + \langle x-y,\, x-y\rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle \\ &\quad + \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\langle x,y\rangle = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right).\end{aligned}$$

„$\Leftarrow$“: Um nachzuweisen, dass b ein Skalarprodukt ist, ist zu zeigen, dass

(i)	(1)	$b(x+y,z) = b(x,z) + b(y,z),\ x,y,z \in X$	(Linearität im
	(2)	$b(\lambda x, y) = \lambda b(x,y),\ x,y \in X,\ \lambda \in \mathbb{R}$	ersten Argument)
(ii)		$b(x,y) = b(y,x),\ x,y \in X$	(Symmetrie)
(iii)		$b(x,x) \geq 0,\ x \in X \setminus \{0\}$ und $b(x,x) = 0 \Rightarrow x = 0$	(positive Definitheit)

(ii) und (iii) lassen sich unter Verwendung der Definition von b einfach nachrechen. Für (iii) verwendet man dabei die Definitheit von $\|.\|$.

(i)(1): Seien $x, y, z \in X$. Wir zeigen

$$b(x+y,z) = b(x,z) + b(y,z),$$

also

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{x+y+z}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x+y-z}{2}\right\|^2 \\ &\qquad = \left\|\frac{x+z}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-z}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y+z}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{y-z}{2}\right\|^2 .\end{aligned}$$

Aus der Parallelogrammgleichung erhalten wir

$$\begin{aligned}\|x+y+z\|^2 &= 2\|x+z\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x+z-y\|^2, \\ \|x+y+z\|^2 &= 2\|y+z\|^2 + 2\|x\|^2 - \|y+z-x\|^2.\end{aligned}$$

Addition beider Gleichungen ergibt

$$\begin{aligned}\|x+y+z\|^2 \ &= \|x+z\|^2 + \|y+z\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(\|x+z-y\|^2 + \|y+z-x\|^2\right).\end{aligned}$$

Setzt man hier $-z$ für z ein, ergibt sich

$$\begin{aligned}\|x+y-z\|^2 \ &= \|x-z\|^2 + \|y-z\|^2 + \|x\|^2 + \|y\|^2 \\ &\quad - \frac{1}{2}\left(\|x-z-y\|^2 + \|y-z-x\|^2\right).\end{aligned}$$

Somit ist

$$\begin{aligned}&\left\|\frac{x+y+z}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x+y-z}{2}\right\|^2 \\ &\qquad = \frac{1}{4}\left(\|x+z\|^2 + \|y+z\|^2 - \|x-z\|^2 - \|y-z\|^2\right) \\ &\qquad = \left\|\frac{x+z}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{x-z}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{y+z}{2}\right\|^2 - \left\|\frac{y-z}{2}\right\|^2 .\end{aligned}$$

(i)(2): Wir zeigen

$$b(\lambda x, y) = \lambda b(x,y) \tag{1}$$

für $x, y \in X$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nach Teil (1) gilt Gleichung (1) für $\lambda \in \mathbb{N}$. Außerdem gilt sie für $\lambda = 0$, denn

$$\begin{aligned} & b(0x, y) + b(x, y) = b(0, y) + b(x, y) = b(0 + x, y) = b(x, y) \\ \Leftrightarrow \quad & b(0x, y) = 0 = 0 \cdot b(x, y), \qquad x, y \in X \end{aligned}$$

und für $\lambda = -1$, denn

$$b(-x, y) + b(x, y) = b(0, y) = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad b(-x, y) = -b(x, y), \qquad x, y \in X.$$

Also gilt Gleichung (1) für alle $\lambda \in \mathbb{Z}$. Für $\lambda = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ mit $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$ erhält man nun

$$b\left(\frac{m}{n}x, y\right) = \frac{1}{n} n b\left(\frac{m}{n}x, y\right) = \frac{1}{n} b\left(n\frac{m}{n}x, y\right) = \frac{1}{n} b\left(mx, y\right) = \frac{m}{n} b\left(x, y\right).$$

Aus der Stetigkeit der Norm $\|.\|$ folgt für festes y die Stetigkeit von b als Funktion des ersten Arguments. Somit sind

$$\lambda \mapsto b(\lambda x, y) \qquad \text{und} \qquad \lambda \mapsto \lambda b(x, y)$$

zwei stetige Funktionen von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die auf der dichten Teilmenge $\mathbb{Q}$ übereinstimmen. Sie stimmen folglich sogar auf ganz $\mathbb{R}$ überein.

(b) Anhand eines Gegenbeispiels zeigen wir, dass die Parallelogrammgleichung nicht für alle $x, y \in C[0,1]$ gilt und $(C[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ somit kein Prähilbertraum ist.
Sei

$$x(t) = \begin{cases} 1 - 2t, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 0 & t \in (\frac{1}{2}, 1]\,, \end{cases} \tag{2}$$

und

$$y(t) = \begin{cases} 0, & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ 1 - 2t & t \in (\frac{1}{2}, 1]\,. \end{cases} \tag{3}$$

Dann ist $\|x + y\|_\infty + \|x - y\|_\infty = 1 + 1 = 2$, aber $2(\|x\|_\infty + \|y\|_\infty) = 2(1 + 1) = 4$.

Aufgabe 3: Sei $C[0,1] = \{f : [0,1] \to \mathbb{C} : \ f \text{ stetig}\}$ der (Banach-)Raum der stetigen Funktionen ausgestattet mit der Supremumsnorm

$$\|\psi\|_{C[0,1]} = \|\psi\|_{L^\infty(0,1)} = \sup_{t \in [0,1]} |\psi(t)|.$$

Wir definieren für $x \in C[0,1]$ den Operator $K : C[0,1] \to Y$ durch

$$(Kx)(t) := \int_0^t x(s)\ ds, \quad t \in [0,1]$$

Für $y \in Y$ betrachten wir das Problem (P), ein $x \in C[0,1]$ zu finden, so dass

$$Kx = y.$$

Zeigen Sie:

(a) Sei $Y = C_0[0,1] := \{f \in C[0,1] : \ f(0) = 0\}$ ausgestattet mit der $\|\cdot\|_{C[0,1]}$-Norm. Dann ist (P) schlecht gestellt.

(b) Sei $Y = C^1[0,1] := \{f \in C[0,1] : \ f' \text{ stetig auf } [0,1]\}$ ausgestattet mit der Norm

$$\|f\|_{C^1[0,1]} := \max(\|f\|_{C[0,1]}, \|f'\|_{C[0,1]}), \quad f \in C^1[0,1].$$

Dann ist (P) schlecht gestellt.

(c) Sei $Y = C_0^1[0,1] := \{f \in C^1[0,1] : \ f(0) = 0\}$ ausgestattet mit der $\|\cdot\|_{C^1[0,1]}$-Norm. Dann ist (P) gut gestellt.

Bemerkung: Die Räume $C[0,1], C_0[0,1], C^1[0,1], C_0^1[0,1]$ bilden bezüglich der angegebenen Normen Banachräume.

Lösung 3: Zunächst gilt allgemein für beliebiges $x \in C[0,1]$ durch Anwendung des Haupsatzes der Differential und Integralrechnung für alle $t \in (0,1)$

$$y(t) = (Kx)(t) = \int_0^t x(s)\ ds \quad \Rightarrow \quad y'(t) = x(t). \tag{4}$$

(a) Wir konstruieren eine konvergente Folge $y_n \to y$ in $Y = C_0^0(0,1)$, so dass die Urbildfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C[0,1]$, $Kx_n = y_n$ nicht in $C[0,1]$ gegen $x \in C[0,1]$, $Kx = y$ konvergiert. Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$

$$y_n(t) := \frac{1}{\sqrt{n}} \sin(nt), \quad t \in [0,1].$$

Offensichtlich ist y_n stetig, $y(0) = 0$, und es gilt

$$\|y_n\|_{C[0,1]} = \frac{1}{\sqrt{n}},$$

d.h. $y_n \to 0 =: y$ in $C[0,1]$. Damit folgt $x = 0$, da $Kx = y = 0$. Für die Urbildfolge gilt wegen (4)

$$\|x_n\|_{C[0,1]} = \|y'\|_{C[0,1]} = \|\frac{1}{\sqrt{n}} n \cos(nx)\|_{C[0,1]} = \sqrt{n},$$

also $\|x_n\|_{C[0,1]} \to \infty$ für $n \to \infty$, womit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht konvergiert.

(b) Unser Argument aus (a) funktioniert hier nicht mehr, da die Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (a) *nicht* in $C^1[0,1]$ konvergiert. Auf der anderen Seite gilt für jedes $x \in C[0,1]$ dass

$$Kx(0) = \int_0^0 x(s)\ ds = 0,$$

d.h. die Gleichung $Kx = f$ ist nicht lösbar, wenn $f \in C^1(0,1)$ eine Funktion ist mit $f(0) \neq 0$. Man wähle hier z.B. $f(s) = 1, \ s \in [0,1]$.

(c) Wir müssen nun zeigen, dass das Problem (P) wohlgestellt ist.
Existenz einer Lösung: Sei $y \in C_0^1[0,1]$ beliebig. Aus der Definition von $C_0^1[0,1]$ folgt, dass y differenzierbar ist und wir können $x := y'$ definieren. Damit ist y Stammfunktion von x, und es gilt

$$Kx(t) = \int_0^t x(s)ds = y(t) - y(0) = y(t),$$

wobei wir $y(0) = 0$ verwendet haben. Damit existiert eine Lösung $x \in C[0,1]$.
Eindeutigkeit: Sei $\hat{x} \in C[0,1]$ eine weitere Lösung von $K\hat{x} = y$. Dann gilt nach (4) $\hat{x} = y' = x$, d.h. $\hat{x} = x$, womit wir die Eindeutigkeit gezeigt haben.
Stetigkeit der Inversen: Sei nun $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset C_0^1[0,1]$ gegen $y \in C_0^1[0,1]$ konvergent, und seien durch $Kx_n = y_n, Kx = y, \ n \in \mathbb{N}$ die Urbilder definiert (also $x_n = y_n', x = y'$). Wir müssen zeigen, dass $x_n - x \to 0$ in $C[0,1]$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\|x_n - x\|_{C[0,1]} &= \|y_n' - y'\|_{C[0,1]} \\
&\leq \max(\|y_n' - y'\|_{C[0,1]}, \|y_n - y\|_{C[0,1]}) \\
&= \|y_n - y\|_{C^1[0,1]} \\
&\to 0 \quad \text{für } n \to \infty.
\end{aligned}$$