Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Karlsruhe, den 21. Januar 2016

Prof. Dr. Andreas Kirsch
Julian Ott
Uwe Zeltmann

10. Übung zur Vorlesung Inverse Probleme
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 22: Seien $(X, \|.\|_X)$, $(Y, \|.\|_Y)$ Hilberträume, $K : X \supset \mathcal{D}(K) \to Y$ eine im allgemeinen nicht lineare Abbildung mit offenem $\mathcal{D}(K)$. Sei $x^* \in \mathcal{D}(K)$, und es gebe ein $\rho > 0$ mit $B(x^*, \rho) \subset \mathcal{D}(K)$, sodass K auf $B(x^*, \rho)$ Fréchet-differenzierbar ist mit Lipschitz-stetiger Ableitung K', d.h. es gebe ein $\gamma > 0$ mit

$$\|K'(x) - K'(\tilde{x})\|_{\mathcal{L}(X,Y)} \;\leq\; \gamma \|x - \tilde{x}\|_X$$

für alle x, $\tilde{x} \in B(x^*, \rho)$.

Wir betrachten das inverse Problem:

$$K(x) = y \tag{1}$$

und das zugehörige linearisierte inverse Problem:

$$K'(x^*)\, h = z \tag{2}$$

an der Stelle x^*.

Zeigen Sie: Ist (1) in x^* lokal schlecht gestellt, so ist auch (2) schlecht gestellt.

Hinweis: Nach einem Lemma aus der Vorlesung gilt insbesondere

$$\|K(x) - K(x^*) - K'(x^*)(x - x^*)\|_Y \;\leq\; \frac{\gamma}{2}\|x - x^*\|_X^2 \tag{3}$$

für jedes $x \in B(x^*, \rho)$.
Zeigen Sie hiermit: Ist $K'(x^*)$ beschränkt invertierbar, so gilt für alle $x \in B(x^*, \rho)$

$$\|x - x^*\|_X \leq \|K'(x^*)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|K(x) - K(x^*)\|_Y + \|K'(x^*)^{-1}\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \frac{\gamma}{2}\|x - x^*\|_X^2 .$$

Lösung 22: Sei (1) in x^* lokal schlecht gestellt. Laut der Definition der lokalen Schlechtgestelltheit gibt es also insbesondere für jedes r mit $0 < r \leq \rho$ eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $B(x^*, r)$, sodass

$$K(x_n) \to K(x^*)\,, \qquad (n \to \infty)\,, \tag{4}$$

aber

$$x_n \nrightarrow x^*\,, \qquad (n \to \infty)\,. \tag{5}$$

Wir führen einen Widerspruchsbeweis und nehmen an, (2) wäre gut gestellt.

Dann muss also $K'(x^*)$ beschränkt invertierbar sein, und es ist

$$\begin{aligned}
\|x_n - x^*\|_X \;&=\; \left\| K'(x^*)^{-1}\,[K(x_n) - K(x^*)] - K'(x^*)^{-1}\,[K(x_n) - K(x^*) - K'(x^*)(x_n - x^*)] \right\|_X \\
&\leq\; \left\|K'(x^*)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|K(x_n) - K(x^*)\|_Y \\
&\quad + \left\|K'(x^*)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|K(x_n) - K(x^*) - K'(x^*)(x_n - x^*)\|_Y \;,
\end{aligned}$$

woraus mit (3)

$$\begin{aligned}
\|x_n - x^*\|_X \;&\leq\; \left\|K'(x^*)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|K(x_n) - K(x^*)\|_Y + \left\|K'(x^*)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \frac{\gamma}{2}\|x_n - x^*\|_X^2 \\
&\leq\; \left\|K'(x^*)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|K(x_n) - K(x^*)\|_Y + \left\|K'(x^*)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \frac{\gamma}{2} r \|x_n - x^*\|_X
\end{aligned}$$

folgt. Wählen wir nun r so klein, dass

$$\left\|K'(x^*)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \frac{\gamma}{2} r \;=:\; q \;<\; 1$$

ist, lässt sich obige Ungleichung umstellen zu

$$\begin{aligned} (1-q)\,\|x_n - x^*\|_X \;&\leq\; \left\|K'(x^*)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|K(x_n) - K(x^*)\|_Y \\ \iff \qquad \|x_n - x^*\|_X \;&\leq\; \frac{1}{1-q} \left\|K'(x^*)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(Y,X)} \|K(x_n) - K(x^*)\|_Y \,. \end{aligned}$$

Aus (4) folgt nun

$$x_n \to x^*\,, \qquad\qquad (n \to \infty)$$

im Widerspruch zu (5). Damit ist der Beweis abgeschlossen.

Aufgabe 23: Sei $k \in C^1([a,b] \times [c,d] \times \mathbb{R})$ und es existiere $C_1 > 0$ mit

$$\left|\frac{\partial k}{\partial r}(t,s,r)\right| \leq C_1, \quad t \in [a,b], s \in [c,d], r \in \mathbb{R}.$$

Weiterhin sei der Integraloperator $K : C[c,d] \to C[a,b]$ definiert durch

$$K(x)(t) = \int_c^d k(t,s,x(s))ds, \quad t \in [a,b].$$

(a) Zeigen Sie: Es existiert $C > 0$ so, dass für alle $x, y \in C[c,d]$

$$\|K(x) - K(y)\|_{L^2(a,b)} \leq C\|x-y\|_{L^2(c,d)},$$

d.h. K kann stetig zu einem Operator $K : L^2(c,d) \to L^2(a,b)$ fortgesetzt werden.
Hinweis: Für $f \in C^1(\mathbb{R})$ mit $|f'| \leq C_1$ gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq C_1|x-y|, \quad x, y \in \mathbb{R}..$$

(b) Sei nun zusätzlich k zweimal stetig differenzierbar bezüglich r mit

$$\left|\frac{\partial^2 k}{\partial r^2}(t,s,r)\right| \leq C_2, \quad t \in [a,b], s \in [c,d], r \in \mathbb{R}.$$

Zeigen Sie: $K : L^2(c,d) \to L^2(a,b)$ ist differenzierbar mit

$$K'(x^*)h(t) = \int_c^d \frac{\partial k}{\partial r}(t,s,x^*(s))h(s)ds.$$

Hinweis: Für $f \in C^2(\mathbb{R})$ mit $|f''| \leq C_2$ gilt

$$|f(x) - f(y) - f'(x)(x-y)| \leq \frac{C_2}{2}|x-y|^2, \quad x, y \in \mathbb{R}.$$

(c) Sei nun $a = 0 = c$, $b = 1 = d$, und sei $y = K(0)$. Zeigen Sie: Die Gleichung $K(x) = y$ ist in $x^* = 0$ lokal schlecht gestellt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass $\|K(x) - K(0)\|_{L^\infty(0,1)} \leq C_1\|x\|_{L^1(0,1)}$ und verwenden sie für $r > 0$ die Funktionenfolge

$$x_n(t) = r\sqrt{2n+1}\; t^n, \quad t \in [0,1], n \in \mathbb{N}.$$

Lösung 23:

(a) Zunächst gilt für alle $t \in [a,b], s \in [c,d], r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_2 > r_1$

$$\begin{aligned} |k(t,s,r_2) - k(t,s,r_1)| &= |\int_{r_1}^{r_2} \frac{\partial k}{\partial r}(t,s,r)\ dr| \\ &\leq \int_{r_1}^{r_2} |\frac{\partial k}{\partial r}(t,s,r)|\ dr \\ &\leq C_1 |r_2 - r_1|. \end{aligned} \tag{6}$$

Seien nun $x, y \in C[c,d]$. Dann gilt unter Verwendung der Cauchy-Schwarzschen Ungleichung ($t \in [a,b]$)

$$\begin{aligned} |K(x)(t) - K(y)(t)|^2 &= \left| \int_c^d k(t,s,x(s)) - k(t,s,y(s))\ ds \right|^2 \\ &\leq \int_c^d |k(t,s,x(s)) - k(t,s,y(s))|^2\ ds \int_c^d 1^2\ ds \\ &\leq \int_c^d C_1^2 |x(s) - y(s)|^2\ ds\ (c-d) \\ &= (d-c) C_1^2 \|x-y\|^2_{L^2(c,d)}. \end{aligned}$$

Also folgt per Integration

$$\begin{aligned} \|K(x) - K(y)\|^2_{L^2(a,b)} &= \int_a^b |K(x)(t) - K(y)(t)|^2\ dt \\ &\leq \int_a^b (d-c) C_1^2 \|x-y\|^2_{L^2(c,d)}\ dt \\ &= (b-a)(d-c) C_1^2 \|x-y\|^2_{L^2(c,d)}, \end{aligned}$$

was zu zeigen war.

(b) Sei zunächst $f \in C^2(\mathbb{R}), |f''| \leq C_2$. Dann gilt für $x \in \mathbb{R}, h > 0$ (mit zweimaliger Anwendung des Fundamentalsatzes der Differential– und Integralrechnung):

$$\begin{aligned} |f(x+h) - f(x) - f'(x)h| &= |\int_x^h f'(x+s) ds - f'(x)h| \\ &= |\int_x^h \int_x^s f''(x+t) dt + f'(x) ds - f'(x)h| \\ &= |\int_x^h \int_x^s f''(x+t)\ dt\ ds| \\ &\leq \int_x^h \int_x^s C_2\ dt\ ds \\ &= \frac{C_2}{2} h^2. \end{aligned}$$

Also gilt für $x, h \in \mathbb{R}$

$$|f(x+h) - f(x) - f'(x)h| \leq \frac{C_2}{2} h^2. \tag{7}$$

Nun zurück zur eigendlichen Aufgabe: Wir fixieren $x^* \in L^2(c,d)$ und bezeichnen mit $A : L^2(c,d) \to L^2(a,b)$ den Operator

$$[Ah](t) = [K'(u^*)h](t),$$

mit der Darstellung von oben. Wir wollen zeigen, dass A tatsächlich die Fréchetableitung von K in x^* ist, d.h. dass

$$\lim_{\|h\|_{L^2(c,d)} \to 0} \frac{\|K(x^* + h) - K(x^*) - Ah\|_{L^2(a,b)}}{\|h\|_{L^2(c,d)}} = 0.$$

Für $t \in [a,b]$ haben wir mit (7)

$$\begin{aligned}
&|[K(x^*+h) - K(x^*) - Ah](t)| \\
&\leq \int_c^d |k(t,s,x^*(s)+h(s)) - k(t,s,x^*(s)) - h(s)\frac{\partial k}{\partial r}(t,s,x^*(s))|\ ds \\
&\leq \int_c^d \frac{C_2}{2}|h(s)|^2 ds \\
&= \frac{C_2}{2}\|h\|^2_{L^2(c,d)}.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir wiederum

$$\begin{aligned}
\|K(x^*+h) - K(x^*) - Ah\|^2_{L^2(a,b)} &= \int_a^b |[K(x^*+h) - K(x^*) - Ah](t)|^2 dt \\
&\leq \int_a^b \left(\frac{C_2}{2}\|h\|^2_{L^2(c,d)}\right)^2 dt \\
&= (b-a)\left(\frac{C_2}{2}\|h\|^2_{L^2(c,d)}\right)^2.
\end{aligned}$$

Ziehen der Wurzel und Division durch $\|h\|_{L^2(c,d)}$ liefert:

$$\frac{\|K(x^*+h) - K(x^*) - Ah\|_{L^2(a,b)}}{\|h\|_{L^2(c,d)}} \leq \sqrt{b-a}\frac{C_2}{2}\|h\|_{L^2(c,d)},$$

was nach dem Grenzwertübergang $\|h\|_{L^2(c,d)} \to 0$ den Beweis vollendet.

(c) Zunächst gilt für $x \in C[0,1]$ mit (6)

$$|[K(x) - K(0)](t)| \leq \int_0^1 |k(t,s,x(s)) - k(t,s,0)|\ ds \leq \int_0^1 C_1|x(s)|\ ds.$$

D.h. es gilt $\|K(x) - K(0)\|_{L^\infty(0,1)} \leq C_1\|x\|_{L^1(0,1)}$. Da $\|\cdot\|_{L^2(0,1)} \leq \|\cdot\|_{L^\infty(0,1)}$ erhalten wir hiermit auch

$$\|K(x) - K(0)\|_{L^2(0,1)} \leq C_1\|x\|_{L^1(0,1)}. \tag{8}$$

Die Idee hinter den gegebenen Funktionen x_n ist die Folgende: Die Norm $\|\cdot\|_{L^1(0,1)}$ ist "echt schwächer" als die Norm $\|\cdot\|_{L^2(0,1)}$, und zwar in dem Sinne, dass es Folgen gibt, die in $L^1(0,1)$ gegen 0 konvergieren, aber nicht in $L^2(0,1)$. Jede solche Folge liefert aufgrund von (8) sofort eine Folge zum Beweis der lokalen Schlechtgestelltheit in 0 und wir weisen nun nach, dass die gegebenen x_n eine solche Folge bilden. Sei also für $r > 0$, $n \in \mathbb{N}$ nun

$$x_n(t) = r\sqrt{2n+1}t^n, \quad t \in [0,1].$$

Damit gilt

$$\|x_n\|_{L^2(0,1)} = r\sqrt{2n+1}\left(\int_0^1 t^{2n}\ dt\right)^{1/2} = r,$$

und auf der anderen Seite

$$\|x_n\|_{L^1(0,1)} = r\sqrt{2n+1}\int_0^1 t^n\ dt = r\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1}.$$

Damit folgt aus (8)

$$\|K(x_n) - K(0)\|_{L^2(0,1)} \leq C_1 r\frac{\sqrt{2n+1}}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} 0,$$

womit die lokale Schlechtgestelltheit in 0 gezeigt ist.