Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Karlsruhe, den 4. Februar 2016

Prof. Dr. Andreas Kirsch
Julian Ott
Uwe Zeltmann

12. Übung zur Vorlesung Inverse Probleme
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 26: Zeigen Sie den Projektionssatz: Sei X ein Hilbertraum und M ein abgeschlossener Unterraum. Dann existiert zu jedem $w \in X$ genau ein $u \in M$ mit

$$\|u - w\| = \inf_{v \in M} \|v - w\|.$$

Weiterhin ist die so definierte Abbildung $P : X \to M, P(w) = u$ linear und beschränkt. Zudem kann u über die folgende Orthogonalitätsbedingung charakterisiert werden

$$\langle \tilde{u} - w, z \rangle = 0 \text{ für alle } z \in M, \tilde{u} \in M \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{u} = P(w).$$

Lösung 26: Sei $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset M \subset X$ eine minimierende Folge, d.h. $\|u_n - w\| \to \gamma := \inf_{v\in M} \|v - w\|$. Wir erinnern zunächst an die Parallelogrammgleichung: Für $x, y \in X$ gilt

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2). \tag{1}$$

Wir zeigen nun, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Cauchyfolge ist: Zunächst wissen wir, dass $\|u_n - w\| \to \gamma$, wir finden also zu gegebenem $\varepsilon > 0$ ein $M \in \mathbb{N}$ so, dass $\|u_n - w\|^2 \leq \gamma^2 + \varepsilon$ für alle $n \geq M$. Damit gilt für $m, n \geq M$ unter Verwendung der Parallelogrammgleichung

$$\begin{aligned}
\|u_n - u_m\|^2 &= \|(u_n - w) - (u_m - w)\|^2 \\
&= 2\|(u_n - w)\|^2 + 2\|(u_m - w)\|^2 - \|(u_n - w) + (u_m - w)\|^2 \\
&= 2\|(u_n - w)\|^2 + 2\|(u_m - w)\|^2 - 2^2\|\frac{1}{2}(u_n + u_m) - w\|^2 \\
&\leq 2\|(u_n - w)\|^2 + 2\|(u_m - w)\|^2 - 4\gamma^2,
\end{aligned}$$

wobei wir genutzt haben, dass $\frac{1}{2}(u_n + u_m) \in M$ und daher $\|\frac{1}{2}(u_n + u_m) - w\| \geq \gamma$. Damit erhalten wir

$$\|u_n - u_m\|^2 \leq 2(\|u_n - w\|^2 - \gamma^2) + 2(\|u_m - w\|^2 - \gamma^2) \leq 4\varepsilon$$

woraus folgt, dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cauchy in X ist. Da M abgeschlossen ist, liegt $u = \lim u_n$ in M. Damit ist die Wohldefiniertheit von P gezeigt, und wir müssen noch die Linearität zeigen. Dazu zeigen wir zunächt die Orthogonlitätseigenschaft. Sei nun $P : X \to M$ der Operator, der w auf den Minimierer $u = P(w)$ abbildet, und sei $z \in M$ beliebig, $u = P(w)$. Dann gilt für alle $\xi \in \mathbb{R}$

$$\gamma^2 = \|u - w\|^2 \leq \|u + \xi z - w\|^2 \quad = \|u - w\|^2 + 2\xi\langle u - w, z\rangle + \xi^2\|z\|^2 =: f(\xi).$$

Die Parabel $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ihr Minimum also bei $\xi = 0$ an, d.h.

$$0 = f'(0) = 2\langle u - w, z\rangle,$$

was zu zeigen war. Für die Rückrichtung sei $\tilde{u} \in M$ mit $\langle \tilde{u} - w, z\rangle = 0$ für alle $z \in M$, und sei $u = P(w)$. Damit gilt also für alle $z \in M$

$$0 = \langle \tilde{u} - w, z\rangle - \langle u - w, z\rangle = \langle \tilde{u} - u, z\rangle.$$

Setzen wir $z = \tilde{u} - u$ ein, erhalten wir $0 = \|\tilde{u} - u\|^2$, also $\tilde{u} = u$, womit auch die Rückrichtung der Orthogonalitätseigenschaft gezeigt ist. Wir zeigen noch, dass P linear ist. Seien hierzu $w_1, w_2 \in X$ beliebig. Dann gilt für alle $z \in M$:

$$\begin{aligned}
0 &= \langle P(w_1 + w_2) - (w_1 + w_2), z\rangle - \langle P(w_1) - w_1, z\rangle - \langle P(w_2) - w_2, z\rangle \\
&= \langle P(w_1 + w_2) - P(w_1) - P(w_2), z\rangle.
\end{aligned}$$

Einsetzen von $z = P(w_1 + w_2) - P(w_1) - P(w_2) \in M$ liefert $P(w_1 + w_2) = P(w_1) + P(w_2)$, der Beweis von $\lambda P(w) = P(\lambda w),\ w \in X, \lambda \in \mathbb{R}$ verläuft analog.

Aufgabe 27: Seien X, Y Hilberträume, $K : X \supset \mathcal{D}(K) \to Y$ stetig Fréchet-differenzierbar auf $\mathcal{D}(K)$, $\mathcal{D}(K)$ offen, $\hat{x} \in \mathcal{D}(K)$ und $y \in Y$. Außerdem sei $\rho > 0$ so, dass Voraussetzung (V1) aus der Vorlesung erfüllt ist.

(a) Sei $M^* = \{x \in B(\hat{x}, \rho) :\ K(x) = y\}$ nichtleer.

Zeigen Sie: Es existiert ein eindeutig bestimmtes $x^+ \in M^*$ mit $\|x^+ - \hat{x}\| \leq \|x - \hat{x}\|$ für alle $x \in M^*$.

(b) Es gebe ein $x^* \in B(\hat{x}, \rho/2)$ mit $K(x^*) = y$. Die Folge $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ sei von der Landweber-Iteration mit $y^\delta = y$ und $x_0 = \hat{x}$ erzeugt. Ferner gelte

$$\mathcal{N}(K'(x^+)) \subset \mathcal{N}(K'(x)), \qquad x \in B(\hat{x}, \rho). \tag{2}$$

Zeigen Sie: $x_k \to x^+$ $(k \to \infty)$ mit dem x^+ aus Teil (a).

Lösung 27:

(a) Nach Voraussetzung ist M^* nichtleer. Es gibt also ein $\bar{x} \in B(\hat{x}, \rho)$ mit $K(\bar{x}) = y$. Laut einem Korollar der Vorlesung nach Formulierung der Voraussetzung (V1) hat M^* also die Darstellung:

$$M^* = (\bar{x} + \mathcal{N}(K'(\bar{x}))) \cap B(\hat{x}, \rho). \tag{3}$$

Wir führen die Bezeichnung $U := \mathcal{N}(K'(\bar{x}))$ ein und stellen fest, dass U ein abgeschlossener linearer Unterraum von X ist. Laut Aufgabe 26 gibt es also ein $u \in U$ mit

$$\|(\bar{x} + u) - \hat{x}\| = \|u - (\hat{x} - \bar{x})\| = \inf_{v \in U} \|v - (\hat{x} - \bar{x})\| = \inf_{v \in U} \|(v + \bar{x}) - \hat{x}\| = \inf_{x \in \bar{x} + U} \|x - \hat{x}\|.$$

Bezeichnen wir $\bar{x} + u$ mit x^+, bleibt lediglich zu zeigen, dass $x^+ \in B(\hat{x}, \rho)$. Dies folgt jedoch direkt aus obiger, definierender Eigenschaft von x^+, denn

$$\|x^+ - \hat{x}\| \leq \|x^+ - \bar{x}\| \leq \rho.$$

(b) In der Vorlesung wurde bewiesen, dass es ein $\tilde{x} \in M^*$ gibt mit $x_k \to \tilde{x}$ $(k \to \infty)$. Zu zeigen ist also: $\tilde{x} = x^+$.

Um dies nachzuweisen, zeigen wir $\tilde{x} - \hat{x} \in \mathcal{N}(K'(x^+))^\perp$. Aus Aufgabe 26 folgt dann mit den Bezeichnungen aus Teil (a):

$$\tilde{x} = P_U(\hat{x}) = \bar{x} + u = x^+.$$

Zunächst beweisen wir mit vollständiger Induktion: $x_k - \hat{x} \in \mathcal{N}(K'(x^+))^\perp,\ k \in \mathbb{N}_0$.

Den Induktionsanfang macht $x_0 = \hat{x}$ mit $x_0 - x_0 = 0 \in \mathcal{N}(K'(x^+))^\perp$. Sei nun $x_k - \hat{x} \in \mathcal{N}(K'(x^+))^\perp$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann folgt aus der Iterationsvorschrift des Landweber-Verfahrens unter Verwendung der Voraussetzung (2):

$$\begin{aligned} x_{k+1} - \hat{x} &= (x_k - \hat{x}) - K'(x_k)^*(K(x_k) - y) \\ &\in \mathcal{N}(K'(x^+))^\perp + \mathcal{R}(K'(x_k)^*) \\ &\subset \mathcal{N}(K'(x^+))^\perp + \mathcal{N}(K'(x_k))^\perp \\ &\subset \mathcal{N}(K'(x^+))^\perp + \mathcal{N}(K'(x^+))^\perp \\ &= \mathcal{N}(K'(x^+))^\perp. \end{aligned}$$

Aufgrund der Abgeschlossenheit von $\mathcal{N}(K'(x^+))^\perp$ führt nun der Grenzübergang für $k \to \infty$ zu $\tilde{x} - \hat{x} \in \mathcal{N}(K'(x^+))^\perp$.