Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Karlsruhe, den 5. November 2015

Prof. Dr. Andreas Kirsch
Julian Ott
Uwe Zeltmann

2. Übung zur Vorlesung Inverse Probleme
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 4: Gegeben sei folgendes Problem:

(D) Zu gegebenem $y \in C^2[0,1]$ mit $y(0) = y(1) = 0$ finde $x \in C[0,1]$ mit $x = y''$.

(a) Formulieren Sie (D) um in ein äquivalentes Problem der Form

(I) Zu gegebenem $y \in C[0,1]$ finde $x \in C[0,1]$ mit $Kx = y$

mit einem Integraloperator

$$K : C[0,1] \to C[0,1], \qquad (Kx)(t) = \int_0^1 k(t,s)\, x(s)\, ds, \quad t \in [0,1].$$

Bemerkung: „Äquivalent" bedeute hierbei, dass (I) zu gegebenem $y \in C[0,1]$ genau dann lösbar ist, falls y sogar die Voraussetzungen in (D) erfüllt und (D) und (I) in diesem Fall dieselbe Lösung haben.

(b) Weisen Sie nach, dass (I) schlecht gestellt ist.

Lösung 4:

(a) Sei $y \in C^2[0,1]$ mit $y(0) = y(1) = 0$ und $x \in C[0,1]$ eine Lösung von (D). Dann gilt

$$\begin{aligned} x(t) = y''(t), \quad t \in [0,1] \qquad &\Leftrightarrow \qquad \int_0^t x(s)\, ds + c = y'(t), \quad t \in [0,1] \qquad (1) \\ &\Leftrightarrow \qquad \int_0^t \int_0^\tau x(s)\, ds\, d\tau + ct + d = y(t), \quad t \in [0,1] \end{aligned}$$

Aus $y(0) = 0$ folgt $d = 0$, und aus $y(1) = 0$ folgt dann $c = -\int_0^1 \int_0^\tau x(s)\, ds\, d\tau$. Mit der Hilfsfunktion

$$g : [0,1]^2 \longrightarrow [0,1], \qquad g(t,s) = \begin{cases} 1\,, & s \le t\,, \\ 0\,, & s > t \end{cases}$$

erhalten wir also

$$\begin{aligned} y(t) &= \int_0^t \int_0^\tau x(s)\, ds\, d\tau - t \int_0^1 \int_0^\tau x(s)\, ds\, d\tau = \int_0^1 g(t,\tau) \int_0^\tau x(s)\, ds\, d\tau - t \int_0^1 \int_0^\tau x(s)\, ds\, d\tau \\ &= \int_0^1 (g(t,\tau) - t) \int_0^\tau x(s)\, ds\, d\tau = \int_0^1 (g(t,\tau) - t) \int_0^1 g(\tau,s)\, x(s)\, ds\, d\tau \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (g(t,\tau) - t)\, g(\tau,s)\, x(s)\, ds\, d\tau = \int_0^1 \int_0^1 (g(t,\tau) - t)\, g(\tau,s)\, x(s)\, d\tau\, ds \\ &= \int_0^1 \underbrace{\int_0^1 (g(t,\tau) - t)\, g(\tau,s)\, d\tau}_{=:k(t,s)}\, x(s)\, ds, \qquad t \in [0,1] \end{aligned}$$

mit

$$
\begin{aligned}
k(t,s) &= \int_0^1 (g(t,\tau)-t)\, g(\tau,s)\, d\tau = \int_s^1 (g(t,\tau)-t)\ d\tau \\
&= \begin{cases} \int_s^t (1-t)\ d\tau + \int_t^1 -t\, d\tau = (1-t)\,(t-s) - t\,(1-t) = s\,(t-1)\ , & t \geq s\,, \\ \int_s^1 -t\, d\tau = t\,(s-1)\ , & t < s\,. \end{cases}
\end{aligned}
$$

Sei nun umgekehrt K als Integraloperator mit dem oben hergeleiteten Kern k definiert, $y \in C[0,1]$ und $x \in C[0,1]$ eine Lösung von (I). Dann verifiziert man durch Einsetzen von $t = 0$ bzw. $t = 1$ in $\int_0^1 k(t,s)\, x(s)\, ds$, dass $y(0) = 0$ bzw. $y(1) = 0$ ist. An (1) liest man weiter die zweimalige Differenzierbarkeit von y ab, und dass x auch Lösung von (D) ist.

Alternative Lösung: Sei für $s, t \in [0,1]$

$$
F_t(s) := \begin{cases} s & \text{für } s < t, \\ t & \text{für } s \geq t. \end{cases}
$$

Dann gilt für festes $t \in [0,1]$, dass $F_t \in H^1(0,1)$ mit der (schwachen) Ableitung

$$
F_t'(s) = g(t,s) \quad \text{für } t \neq s, t, s \in (0,1).
$$

Mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung und $y(0) = 0$ folgt zusammen mit der partiellen Integration für Sobolevfunktionen

$$
\begin{aligned}
y(t) &= \int_0^t y'(s)\ ds \\
&= \int_0^1 g(t,s) y'(s)\ ds \\
&= [F_t(s) y'(s)]_{s=0}^1 - \int_0^1 F_t(s) y''(s)\ ds \\
&= t y'(1) - \int_0^1 F_t(s) y''(s)\ ds.
\end{aligned} \tag{2}
$$

Einsetzen von $t = 1$ liefert

$$
0 = y(1) = y'(1) - \int_0^1 s y''(s)\ ds.
$$

Damit ist $y'(1)$ bestimmt, und wir erhalten durch Einsetzen in die letzte Zeile von (2):

$$
y(t) = \int_0^1 (ts - F_t(s)) y''(s)\ ds,
$$

und damit

$$
k(t,s) = ts - F_t(s),
$$

was per Definition von $F_t(s)$ den gleichen Kern wie die erste Lösung liefert.

(b) Da $C[0,1]$ den Raum der Polynomfunktionen auf $[0,1]$ als Teilraum enthält, ist er unendlichdimensional. Nach dem ersten Satz in Kapitel 1.3 der Vorlesung genügt es also zu zeigen, dass K kompakt ist. Dafür ist nach den Sätzen in Kapitel 1.2 wiederum hinreichend, dass der Kern k von K stetig ist.

Als Produkt von Summen stetiger Funktionen ist k an allen Stellen $(t,s) \in [0,1]^2$ mit $t > s$ oder $t < s$ stetig. Und da überdies die stetige Fortsetzung der Teilfunktion $(t,s) \mapsto t\,(s-1)$ auf der Diagonalen (r,r), $r \in [0,1]$ mit der Funktion $(t,s) \mapsto s\,(t-1)$ übereinstimmt, ist k auf ganz $[0,1]^2$ stetig.

Aufgabe 5: Sei $X = Y = l^2(\mathbb{C}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{C} : \|x\|_{l^2} < \infty\}$ der komplexe Folgenraum ausgestattet mit der Norm

$$\|x\|_{l^2} := \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2\right)^{1/2}.$$

Weiterhin seien $\alpha, \beta > 0$, und $K : l^2(\mathbb{C}) \to l^2(\mathbb{C})$ sei definiert durch $(Kx)_n := \frac{1}{n^\alpha} x_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Zudem definieren wir den Unterraum $X_1 := \{x \in l^2(\mathbb{C}) : \|x\|_1 < \infty\}$ und die Norm

$$\|x\|_1 := \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\beta} |x_n|^2\right)^{1/2}.$$

Zeigen Sie:

(a) K ist kompakt.
Hinweis: Zeigen Sie, dass die Operatoren $K_m : l^2(\mathbb{C}) \to l^2(\mathbb{C})$ ($m \in \mathbb{N}$), definiert durch

$$(K_m x)_n = \begin{cases} \frac{1}{n^\alpha} x_n & \text{falls } n \le m \\ 0 & \text{falls } n \ge m+1, \end{cases}$$

in der Operatornorm gegen K konvergieren und kompakt sind.

(b) Für den worst case error zu $K : l^2(\mathbb{C}) \to l^2(\mathbb{C})$ gilt

$$\mathcal{E}(\delta, E, \|\cdot\|_1) \le \delta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} E^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}.$$

Hinweis: Hölderungleichung.

Lösung 5:

(a) Sei K_m definiert wie oben. K_m ist kompakt, da K_m beschränkt ist und da das Bild von den m Vektoren $\{e^{(1)}, \ldots, e^{(m)}\}$ aufgespannt wird, wobei $e_j^{(i)} = 0$ für $i \ne j$ und $e_j^{(i)} = 1$ für $i = j$. Zu zeigen bleibt, dass $\|K - K_m\| \to 0$ wenn $m \to \infty$. Es gilt für beliebiges $x \in l^2(\mathbb{C})$ und alle $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}\|(K - K_m)x\|^2 &= \sum_{l=m+1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}} |x_l|^2 \\ &\le \frac{1}{(m+1)^{2\alpha}} \sum_{l=m+1}^{\infty} |x_l|^2 \\ &\le \frac{1}{(m+1)^{2\alpha}} \|x\|_{l^2}^2,\end{aligned}$$

und damit $\|K - K_m\| \le 1/(m+1)^\alpha \to 0$ für $m \to \infty$. Damit ist K Grenzwert kompakter Operatoren, und da die Menge kompakter Operatoren abgeschlossen bezüglich der Operatornorm ist, folgt die Behauptung.

(b) Da $1 \le n^{2\beta}$, folgt sofort, dass $\|\cdot\|_1$ stärker als $\|\cdot\|_{l^2}$ ist. Sei also $x \in X_1$ mit $\|Kx\|_{l^2} \le \delta, \|x\|_1 \le E$. Wir müssen zeigen, dass dann $\|x\|_{l^2} \le \delta^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} E^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$ gilt. Zunächst setzen wir

$$p := \frac{\alpha+\beta}{\beta}, \quad p' := \frac{\alpha+\beta}{\alpha}.$$

Dann gilt $1/p + 1/p' = 1$, d.h. p und p' sind Hölder-konjugierte Exponenten. Wir sehen, dass

$$\left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)^{1/p} \left(n^{2\beta}\right)^{1/p'} = n^{-\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta} + \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}} = n^0 = 1,$$

und damit

$$\begin{aligned}
\|x\|_{l^2}^2 &= \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{2\alpha}}\right)^{1/p} \left(n^{2\beta}\right)^{1/p'} \left(|x_n|^2\right)^{1/p+1/p'} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n^{2\alpha}}|x_n|^2\right)^{1/p} \left(n^{2\beta}|x_n|^2\right)^{1/p'} \\
&\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2\alpha}}|x_n|^2\right)^{1/p} \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{2\beta}|x_n|^2\right)^{1/p'} \\
&= \left(\|Kx\|_{l^2}^2\right)^{1/p} \left(\|x\|_1^2\right)^{1/p'} \\
&\leq \delta^{2/p} E^{2/p'}
\end{aligned}$$

Die Wurzel aus der letzten Ungleichung liefert

$$\|x\|_{l^2} \leq \delta^{1/p} E^{1/p'},$$

was nach Einsetzen der Definition von p und p' genau die Behauptung liefert.