Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Karlsruhe, den 19. November 2015

Prof. Dr. Andreas Kirsch
Julian Ott
Uwe Zeltmann

4. Übung zur Vorlesung Inverse Probleme
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 8: Sei $K : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$,

$$Kx(t) = \int_0^t x(s)\,ds, \qquad t \in [0,1]$$

der Operator aus Aufgabe 6 und

$$Y_1 = \{y \in H^1(0,1) : \quad y(0) = 0\} \,.$$

(a) Zeigen Sie, dass der adjungierte Operator $K^* : L^2(0,1) \to L^2(0,1)$ injektiv ist.

Hinweis: Sie können ohne Beweis verwenden, dass

$$U_1 = \{y \in C^1[0,1] : \quad y(0) = 0\}$$

dicht in $L^2(0,1)$ liegt.

(b) Zeigen Sie

$$Y_1 = \left\{ y \in L^2(0,1) : \quad \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\int_0^1 y(s) \, \sin\left((\frac{\pi}{2} + n\pi)\, s \right) \, ds \right)^2 < \infty \right\} \,.$$

Hinweis: Verwenden Sie den Satz von Picard.

(c) Stellen Sie die Lösung des Problems

$$Kx = y$$

als Reihe dar.

Lösung 8:

(a) Sei $y \in L^2(0,1)$ mit $K^*y = 0$. Zu zeigen ist: $y = 0$. Für beliebiges $x \in C[0,1]$ gilt:

$$0 = (K^*y, x)_{L^2(0,1)} = (y, Kx)_{L^2(0,1)} \,. \tag{1}$$

Unter Verwendung des zweiten Hauptsatzes der Differential- und Integralrechnung weist man nach, dass

$$K\left(C[0,1]\right) = U_1 \,.$$

Gleichung (1) nimmt damit die Form

$$0 = (y, z)_{L^2(0,1)} \,, \qquad z \in U_1 \tag{2}$$

an. Nun ist aber das Funktional $z \mapsto (y, z)_{L^2(0,1)}$ beschränkt auf $L^2(0,1)$, da nach der Cauchy-Schwarz'schen Ungleichung

$$\left|(y, z)_{L^2(0,1)}\right| \le \|y\|_{L^2(0,1)} \, \|z\|_{L^2(0,1)} \,, \qquad z \in U_1$$

gilt, und U_1 liegt nach dem gegebenen Hinweis dicht in $L^2(0,1)$. Folglich lässt sich (2) fortsetzen zu

$$0 = (y, z)_{L^2(0,1)} \,, \qquad z \in L^2(0,1) \,,$$

woraus durch Wahl von $z = y$ mit der Definitheit des Skalarprodukts $y = 0$ folgt.

(b) Sei $(\sigma_n, x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ das singuläre System zu K aus Aufgabe 6 (d).
Laut dem Satz von Picard ist das Problem

$$Kx = y \tag{3}$$

genau dann lösbar, wenn

$$y \in \mathcal{N}(K^*)^\perp \qquad \text{und} \qquad \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{\sigma_n^2}(y, y_n)^2 < \infty\,. \tag{4}$$

Nach Teil (a) ist K^* injektiv, was äquivalent zu $\mathcal{N}(K^*) = \{0\}$, also $\mathcal{N}(K^*)^\perp = L^2(0,1)$ ist. Die erste Bedingung in (4) ist somit immer erfüllt. Die Lösbarkeit von $Kx = y$ ist damit bereits zur zweiten Bedingung in (4) äquivalent.

Andererseits ist $Kx = y$ genau dann lösbar, wenn $y \in \mathcal{R}(K)$ gilt, und analog zur Bestimmung des Bildes von K^* in Aufgabe 6 (b) weist man nach, dass Y_1 gerade das Bild $\mathcal{R}(K)$ von K darstellt.

Es ist also

$$Y_1 = \left\{ y \in L^2(0,1) : \quad \sum_{n\in\mathbb{N}_0} \frac{1}{\sigma_n^2}(y, y_n)^2 < \infty \right\}\,. \tag{5}$$

Mit den Ergebnissen aus Aufgabe 6 (d) erhält man die Reihe in (5) in der expliziten Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right)^2 \left(\int_0^1 y(s)\,\sqrt{2}\,\sin\left((\frac{\pi}{2} + n\pi)\,s \right)\,ds \right)^2\,.$$

Durch elementare Abschätzungen folgt nun die Äquivalenz von (5) mit der in der Aufgabenstellung angegebenen Darstellung von Y_1.

(c) Der Satz von Picard macht ferner die Aussage, dass die Lösung von (3) gegeben ist durch

$$\begin{aligned}
x(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sigma_n}(y, y_n)\,x_n(t) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} + n\pi\right) \left(\int_0^1 y(s)\,\sqrt{2}\,\sin\left((\frac{\pi}{2} + n\pi)\,s \right)\,ds \right) \sqrt{2}\,\cos\left((\frac{\pi}{2} + n\pi)\,t \right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (\pi + 2n\pi) \left(\int_0^1 y(s)\,\sin\left((\frac{\pi}{2} + n\pi)\,s \right)\,ds \right) \cos\left((\frac{\pi}{2} + n\pi)\,t \right)\,,
\end{aligned}$$

für jedes $t \in [0,1]$. Die Konvergenz dieser Reihe ist im L^2-Sinne zu verstehen.

Aufgabe 9: Seien X, Y separable Hilberträume, $K : X \to Y$ ein kompakter Operator mit Singulärwertzerlegung $(\sigma_j, x_j, y_j)_{j\in J}$, sei $s > 0$ fest gewählt, und sei $q : (0,\infty) \times (0, \|K\|] \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$q(\alpha, \sigma) := 1 - \left(1 - \frac{\sigma^2}{\alpha + \sigma^2}\right)^s\,.$$

Zeigen Sie:

(a) q ist eine Filterfunktion.

(b) Sei R_α die zu q korrespondierende Regularisierung $R_\alpha : Y \to X$ von K. Dann gilt für alle $x \in X^{2s}$

$$\|R_\alpha K x - x\| \le \alpha^s \|x\|_{2s},$$

wobei

$$X^{2s} = \left\{ x \in \mathcal{N}(K)^\perp : \|x\|_{2s}^2 := \sum_{j\in J} \sigma_j^{-4s} |(x, x_j)|^2 < \infty \right\}.$$

Lösung 9:

(a) Wir zeigen die definierenden Eigenschaften einer Filterfunktion: Aus

$$q(\alpha,\sigma) = 1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}\right)^s,$$

und da offenbar $\alpha/(\alpha+\sigma^2) \in [0,1]$ für alle $\alpha,\sigma > 0$, folgt sofort $q(\alpha,\sigma) \in [0,1]$. Damit ist Eigenschaft (1) gezeigt. Für Eigenschaft (2) zeigen wir nun, dass

$$|q(\alpha,\sigma)| \leq \frac{s}{\sqrt{\alpha}}\,\sigma, \quad \text{für alle } \sigma,\alpha > 0.$$

Es gilt zunächst

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\partial q}{\partial \sigma}(\alpha,\sigma)\right| &= \left| s\frac{\alpha^s}{(\alpha+\sigma^2)^{s+1}} 2\sigma \right| \\
&= 2s \underbrace{\left|\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}\right|^s}_{\leq 1} \left|\frac{\sigma}{\alpha+\sigma^2}\right| \\
&\leq 2s\frac{1}{2\sqrt{\alpha}},
\end{aligned}$$

wobei wir die Formel

$$\frac{\sigma}{\alpha+\sigma^2} \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$$

verwendet haben. Damit folgt mit dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\begin{aligned}
|q(\alpha,\sigma)| &= |\underbrace{q(\alpha,0)}_{=0} + \int_0^\sigma \frac{\partial q}{\partial \sigma}(\alpha,\tau)\ d\tau| \\
&\leq \int_0^\sigma |\frac{\partial q}{\partial \sigma}(\alpha,\tau)|\ d\tau \\
&\leq \int_0^\sigma \frac{s}{\sqrt{\alpha}}\ d\tau \\
&= \sigma\frac{s}{\sqrt{\alpha}},
\end{aligned}$$

und wir haben gezeigt, dass (2) gilt mit $c(\alpha) = s/\sqrt{\alpha}$. Weiterhin gilt offensichtlich für festes $\sigma > 0$:

$$\lim_{\alpha\to 0} q(\alpha,\sigma) = 1 - \lim_{\alpha\to 0}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}\right)^s = 1,$$

womit Eigenschaft (3a) gezeigt ist, d.h. q ist eine Filterfunktion.

(b) Wir erinnern an die Darstellungen ($x \in X$, $y \in Y$)

$$Kx = \sum_{j\in J} \sigma_j(x,x_j)y_j, \quad R_\alpha y = \sum_{j\in J} \frac{q(\alpha,\sigma_j)}{\sigma_j}(y,y_j)x_j.$$

Sei $x \in \mathcal{N}(K)^\perp$ dargestellt durch

$$x = x_0 + \sum_{j\in J}(x,x_j)x_j,$$

wobei $x_0 \in \mathcal{N}(K)$. Wir zeigen nun, dass $x_0 = 0$: Es gilt, da $x \in \mathcal{N}(K)^\perp$

$$0 = (x_0,x) = (x_0,\ x_0 + \sum_{j\in J}(x,x_j)x_j\ ) = (x_0,x_0) + \sum_{j\in J}(x,x_j)(x_0,x_j) = (x_0,x_0) = \|x_0\|^2,$$

da für alle $j \in J$

$$(x_0, x_j) = (x_0, \sigma_j^{-2} K^* K x_j) = \sigma_j^{-2}(K^* K x_0, x_j) = \sigma_j^{-2}(K^* 0, x_j) = 0.$$

Also ist $\|x_0\| = 0$, und damit folgt

$$x = \sum_{j \in J} (x, x_j) x_j.$$

Mit diesen Darstellungen erhalten wir für $x \in X_{2s}$:

$$\begin{aligned}
\|R_\alpha K x - x\|^2 &= \| \sum_{j \in J} \left(\frac{q(\alpha, \sigma_j)}{\sigma_j} \sigma_j - 1 \right) (x, x_j) x_j \|^2 \\
&= \| \sum_{j \in J} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \sigma_j^2} \right)^s (x, x_j) x_j \|^2 \\
&= \sum_{j \in J} \left| \left(\frac{\alpha}{\alpha + \sigma_j^2} \right)^s (x, x_j) \right|^2 \\
&\leq \sum_{j \in J} \left| \left(\frac{\alpha}{\sigma_j^2} \right)^s (x, x_j) \right|^2 \\
&= \alpha^{2s} \sum_{j \in J} \sigma_j^{-4s} |(x, x_j)|^2 \\
&= \alpha^{2s} \|x\|_{2s}^2.
\end{aligned}$$

Nimmt man nun die Wurzel aus der letzten Gleichung, erhält man die gewünschte Aussage.