Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Karlsruhe, den 3. Dezember 2015

Prof. Dr. Andreas Kirsch
Julian Ott
Uwe Zeltmann

6. Übung zur Vorlesung Inverse Probleme
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 13: Seien X und Y Hilberträume, $K : X \to Y$ ein injektiver kompakter Operator mit dichtem Bild und $(\sigma_j, x_j, y_j)_{j\in J}$ ein zugehöriges Singulärsystem.

In den Aufgaben 9 und 11 führten wir die iterierte Tikhonov-Regularisierung $R_{s,\alpha}$ mit Parameter $s > 0$ über die Filterfunktion

$$q_s(\alpha, \sigma) = 1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha + \sigma^2}\right)^s \tag{1}$$

ein. Für $s \in \mathbb{N}_0$ kann diese für festes $\alpha > 0$, $y \in Y$ und mit der Schreibweise $x^s := R_{s,\alpha} y$ auch implizit rekursiv definiert werden durch

$$x^0 = 0\,, \qquad (\alpha I + K^*K)\, x^{m+1} = K^*y + \alpha\, x^m\,, \qquad m = 0\,, \ldots\,, s-1\,. \tag{2}$$

(a) Zeigen Sie, dass (2) äquivalent ist zu

$$x^0 = 0\,, \qquad x^{m+1} = x^m + z^m\,, \qquad m = 0\,, \ldots\,, s-1\,,$$

wobei z^m jeweils die einzige Minimalstelle des quadratischen Funktionals:

$$J_m(z) \;:=\; \|Kz - (y - Kx^m)\|_Y^2 \;+\; \alpha\,\|z\|_X^2$$

ist.

(b) Welche bereits bekannte Regularisierung ist durch $R_{1,\alpha}$ gegeben?

(c) Zeigen Sie, dass die Filterfunktion der in (2) definierten Regularisierung tatsächlich die Form (1) hat.

Lösung 13:

(a) Wir formen die Rekursionsformel in (2) um:

$$\begin{aligned}
& (\alpha I + K^*K)\, x^{m+1} &&= K^*y + \alpha\, x^m \\
\Leftrightarrow\quad & (\alpha I + K^*K)\, x^{m+1} &&= K^*y + \alpha\, x^m + K^*Kx^m - K^*Kx^m \\
\Leftrightarrow\quad & (\alpha I + K^*K)\, \underbrace{\left(x^{m+1} - x^m\right)}_{=:z^m} &&= K^*\, \underbrace{(y - Kx^m)}_{=:\tilde{y}} \\
\Leftrightarrow\quad & (\alpha I + K^*K)\, z^m &&= K^*\tilde{y}\,.
\end{aligned}$$

Damit ist also z^m Lösung der Normalgleichung:

$$(\alpha I + K^*K)\, z = K^*\tilde{y}$$

des Tikhonov-Funktionals:

$$z \quad\mapsto\quad \|Kz - \tilde{y}\|_Y^2 \;+\; \alpha\,\|z\|_X^2$$

und somit wie aus der Vorlesung bekannt dessen einzige Minimalstelle.

(b) Für $s = 1$ nimmt (2) die Form:

$$(\alpha I + K^*K)\, x^1 = (\alpha I + K^*K)\, x^{0+1} = K^*y + \alpha\, x^0 = K^*y$$

an. Es handelt sich also um die Tikhonov-Regularisierung.

(c) Der Beweis wird über vollständige Induktion mit Induktionsanfang $s = 0$ erbracht:

$$\begin{aligned} R_{0,\alpha}\, y = x^0 = 0 = \sum_{j\in J} 0\, x_j &= \sum_{j\in J} \frac{1}{\sigma_j}\left[1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\sigma_j^2}\right)^0\right](y,y_j)\, x_j \\ &= \sum_{j\in J} \frac{q_0(\alpha,\sigma_j)}{\sigma_j}(y,y_j)\, x_j\,. \end{aligned}$$

Sei die Filterfunktion zu $R_{s,\alpha}$ für ein $s \in \mathbb{N}_0$ nun also durch (1) gegeben. Dann bestimmen wir die Koeffizienten ξ_j der Basisentwicklung $x^{s+1} = \sum_{j\in J} \xi_j x_j$ von x^{s+1} aus der Rekursionsformel in (2) wie folgt:

$$\begin{aligned} & (\alpha I + K^*K)\, x^{s+1} &&= K^*y + \alpha\, x^s \\ \Leftrightarrow\quad & (\alpha I + K^*K) \sum_{j\in J} \xi_j\, x_j &&= K^* \sum_{j\in J} (y,y_j)\, y_j + \alpha \sum_{j\in J} \frac{q_s(\alpha,\sigma_j)}{\sigma_j}(y,y_j)\, x_j \\ \Leftrightarrow\quad & \alpha \sum_{j\in J} \xi_j\, x_j + K^* \sum_{j\in J} \xi_j \sigma_j\, y_j &&= \sum_{j\in J} (y,y_j)\, \sigma_j\, x_j + \alpha \sum_{j\in J} \frac{q_s(\alpha,\sigma_j)}{\sigma_j}(y,y_j)\, x_j \\ \Leftrightarrow\quad & \sum_{j\in J} \left(\alpha + \sigma_j^2\right) \xi_j\, x_j &&= \sum_{j\in J} \left[\sigma_j + \frac{\alpha\, q_s(\alpha,\sigma_j)}{\sigma_j}\right](y,y_j)\, x_j\,. \end{aligned}$$

Aus der Eindeutigkeit der Basisdarstellung folgt nun die Gleichheit der entsprechenden Koeffizienten:

$$\begin{aligned} & \left(\alpha + \sigma_j^2\right)\, \xi_j &&= \left[\sigma_j + \frac{\alpha\, q_s(\alpha,\sigma_j)}{\sigma_j}\right](y,y_j) \\ \Leftrightarrow\quad & \left(\alpha + \sigma_j^2\right)\, \xi_j &&= \left[\sigma_j + \frac{\alpha}{\sigma_j}\left(1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\sigma_j^2}\right)^s\right)\right](y,y_j) \\ \Leftrightarrow\quad & \left(\alpha + \sigma_j^2\right)\, \xi_j &&= \left[\frac{\sigma_j^2+\alpha}{\sigma_j} - \frac{\alpha}{\sigma_j}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\sigma_j^2}\right)^s\right](y,y_j) \\ \Leftrightarrow\quad & \xi_j &&= \frac{1}{\sigma_j}\left[1 - \frac{\alpha}{\alpha+\sigma_j^2}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\sigma_j^2}\right)^s\right](y,y_j) \\ \Leftrightarrow\quad & \xi_j &&= \frac{1}{\sigma_j}\left[1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\sigma_j^2}\right)^{s+1}\right](y,y_j) \\ \Leftrightarrow\quad & \xi_j &&= \frac{q_{s+1}(\alpha,\sigma_j)}{\sigma_j}(y,y_j)\,, \qquad j \in J\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 14: Sei $K : X \to Y$ kompakt, injektiv, mit Singulärsystem $(\sigma_j, x_j, y_j)_{j\in J}$ zwischen Hilberträumen. Sei $q : (0,\infty)\times(0,\|K\|] \to \mathbb{R}$ eine Filterfunktion mit zugehöriger Regularisierung R_α. Zeigen Sie

(a) Es gilt

$$\alpha \mapsto \|R_\alpha y\| \text{ ist monoton fallend } \forall y \in Y \quad\Leftrightarrow\quad \alpha \mapsto |q(\alpha,\sigma_j)| \text{ ist monoton fallend } \forall j \in J$$

sowie

$$\alpha \mapsto \|KR_\alpha y - y\| \text{ ist mon. steigend } \forall y \in Y \quad\Leftrightarrow\quad \alpha \mapsto |q(\alpha,\sigma_j) - 1| \text{ ist mon. steigend } \forall j \in J.$$

(b) Die zu iteriertem Tikhonov, Landweber und Spectral Cut-Off gehörenden Filterfunktionen erfüllen jeweils beide Monotonie-Kriterien aus (a).

Lösung 14:

(a) Wir betrachten im folgenden immer die Normquadrate anstatt der Norm. Da die Funktion $x \mapsto x^2$ monoton steigend ist auf $[0,\infty)$, ändern sich die Monotonien nicht.
Erste Äquivalenz: Es gilt

$$\|R_\alpha y\|^2 = \sum_{j\in J} \frac{|q(\alpha,\sigma_j)|^2}{|\sigma_j|^2} |(y,y_j)|^2. \tag{3}$$

Sei $\alpha \to \|R_\alpha y\|$ monoton fallend für alle $y \in Y$. Mit der Wahl $y = y_k,\ k \in J$ folgt aus der Orthonormalität der (y_j), dass dann

$$\|R_\alpha y\|^2 = \frac{|q(\alpha,\sigma_k)|^2}{|\sigma_k|^2}$$

monoton fallend ist in α. Da auf der rechten Seite nur $|q(\alpha,\sigma_j)|$ von α abhängt, folgt die Montonie von $|q(\alpha,\sigma_j)|$.
Sei nun umgekeht $\alpha \mapsto |q(\alpha,\sigma_j)|$ monton fallend für alle $j \in J$. Dann sind alle Summanden der rechten Seite von (3) monoton fallen in α, also auch die ganze Reihe.
Zweite Äquivalenz: Die Behauptung folgt mit der Darstellung

$$\|KR_\alpha y - y\|^2 = \sum_{j\in J} |q(\alpha,\sigma_j) - 1|^2 |(y,y_j)|^2$$

und der gleichen Argumentation wie zur ersten Äquivalenz.

(b) **iterierter Tikhonov:** Sei $s > 0$. Die Filterfunktion zum iterierten Tikhonov ist gegeben durch

$$q(\alpha,\sigma) = 1 - \left(\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}\right)^s.$$

Da $(\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2})^s \in [0,1]$ für alle $\alpha > 0, \sigma \in \mathbb{R}$, folgt $|q(\sigma,\alpha)| = q(\sigma,\alpha)$, und wir können die Monotonie durch Betrachten derAbleitung bestimmen. Es gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}|q(\alpha,\sigma)| &= \frac{\partial}{\partial\alpha} q(\alpha,\sigma) \\ &= -s\frac{\alpha^{s-1}\sigma^2}{(\sigma^2+\alpha)^{s+1}} \\ &\le 0,\end{aligned}$$

und es folgt, dass $\alpha \mapsto |q(\alpha,\sigma)|$ monton fallend für alle $\sigma \in \mathbb{R}$ ist.
Aus

$$q(\alpha,\sigma) - 1 = -\left(\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}\right)^s \le 0$$

folgt

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\alpha}|q(\alpha,\sigma) - 1| &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\sigma^2}\right)^s \\ &= s\frac{\alpha^{s-1}\sigma^2}{(\sigma^2+\alpha)^{s+1}} \\ &\ge 0,\end{aligned}$$

also dass $\alpha \mapsto |q(\alpha,\sigma) - 1|$ monoton steigend ist für alle $\sigma \in \mathbb{R}$.

Landweber: Sei $0 < a < 1/\|K\|^2$. Die Filterfunktion zur Landweberiteration ist gegeben durch

$$q(\alpha,\sigma) = 1 - (1 - a\sigma^2)^{\frac{1}{\alpha}}, \quad \sigma \in (0,\|K\|], \alpha > 0.$$

Die restliche Argumentation folgt wie beim iterierten Tikhonovverfahren. Zur Kontrolle sei hier nur die Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(1 - a\sigma^2)^{\frac{1}{\alpha}} = -(1 - a\sigma^2)^{\frac{1}{\alpha}} \frac{\ln(1-\alpha\sigma^2)}{\alpha^2}$$

gegeben. Man beachte, dass $(1 - a\sigma^2) \in [0, 1]$ für $\sigma \in (0, \|K\|]$.

Spectral Cut-Off: Die Filterfunktion ist gegeben durch

$$q(\alpha, \sigma) = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha \leq \sigma^2 \\ 0 & \text{if } \alpha > \sigma^2. \end{cases}$$

Offenbar gilt

$$|q(\alpha, \sigma)| = \begin{cases} 1 & \text{if } \alpha \leq \sigma^2 \\ 0 & \text{if } \alpha > \sigma^2, \end{cases}$$

und die Abbildung $\alpha \mapsto |q(\alpha, \sigma)|$ ist monton fallend für alle $\sigma \in \mathbb{R}$. Weiterhin gilt

$$|q(\alpha, \sigma) - 1| = \begin{cases} 0 & \text{if } \alpha \leq \sigma^2 \\ 1 & \text{if } \alpha > \sigma^2, \end{cases}$$

woraus sofort folgt, dass $\alpha \mapsto |q(\alpha, \sigma) - 1|$ monoton steigend ist für alle $\sigma \in \mathbb{R}$.