Karlsruher Institut für Technologie
Institut für Angewandte und Numerische Mathematik
Karlsruhe, den 17. Dezember 2015

Prof. Dr. Andreas Kirsch
Julian Ott
Uwe Zeltmann

8. Übung zur Vorlesung Inverse Probleme
Aufgaben mit Lösungen

Aufgabe 17:

(a) Zu $\alpha > 0$ sei $\hat{g}_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\alpha x^2}$ die Fouriertransformierte einer Funktion $g_\alpha \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Bestimmen Sie g_α.

Hinweis: In der Vorlesung wurde bereits gezeigt, dass die Fouriertransformierte der Funktion $h_\alpha(x) = e^{-\alpha x^2}$ durch $\hat{h}_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}\, e^{-x^2/4\alpha}$ gegeben ist.

(b) Mit dem g_α aus Teil (a) ist für beliebiges $f \in L^2(\mathbb{R})$ die Faltung $f * g_\alpha \in C^\infty(\mathbb{R})$, $\alpha > 0$. Beweisen Sie, dass

$$\|f * g_\alpha - f\|_{L^2(\mathbb{R})} \longrightarrow 0 \qquad\qquad (\alpha \to 0)\,.$$

Lösung 17:

(a) Für jede Funktion $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ gilt:

$$\mathcal{F}^{-1}\phi(x) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\cdot y} f(y)\, dy = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(-x)\cdot y} f(y)\, dy = \mathcal{F}\phi(-x)\,.$$

Also ist

$$g_\alpha(x) = \mathcal{F}^{-1}\hat{g}_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathcal{F}^{-1} h_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathcal{F} h_\alpha(-x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}\, e^{-x^2/4\alpha}\,.$$

(b) Da die Fouriertransformation eine Isometrie auf L^2 ist, gilt nach dem Faltungssatz:

$$\begin{aligned}
\|f * g_\alpha - f\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \|\mathcal{F}(f * g_\alpha - f)\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\mathcal{F}(f * g_\alpha) - \mathcal{F}(f)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \|\sqrt{2\pi}\, \hat{f}\, \hat{g}_\alpha - \hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} = \|\hat{f}\, (\sqrt{2\pi}\, \hat{g}_\alpha - 1)\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\hat{f}(x)\right|^2 \left|\sqrt{2\pi}\, \hat{g}_\alpha(x) - 1\right|^2 dx\,. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Für $\alpha \to 0$ strebt $\sqrt{2\pi}\, \hat{g}_\alpha$ punktweise gegen 1. Ferner ist

$$\left|\sqrt{2\pi}\, \hat{g}_\alpha(x) - 1\right| \le \left|\sqrt{2\pi}\, \hat{g}_\alpha(x)\right| + |1| \le 1 + 1 = 2\,, \qquad\qquad x \in \mathbb{R}\,.$$

Also lässt sich der Integrand in (1) betraglich punktweise nach oben gegen die Majorante $4\,|\hat{f}|^2$ abschätzen und konvergiert punktweise gegen 0. Da $f \in L^2(\mathbb{R})$ und somit auch $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$, ist diese Majorante integrierbar, sodass aus dem Satz von der majorisierten Konvergenz (auch Satz von Lebesgue genannt) die Behauptung folgt.

Aufgabe 18: Sei $\rho : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ rotationssymmetrische Dichte eines Objekts mit $\mathrm{supp}(\rho) \subset B_R(0)$, d.h. es existiert $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ mit

$$\rho(x) = f(|x|), \quad x \in \mathbb{R}^2.$$

Wir modellieren einen Parallelscanner, der entlang der x_1–Achse an dem Objekt vorbeifährt über die Funktion

$$V(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho(x_1, x_2)\ dx_2.$$

Schreiben Sie V also Integraloperator der Funktion f um, d.h. bestimmen sie $k : \mathbb{R} \times [0, \infty) \to \mathbb{R}$ so, dass

$$V(x) = \int_0^{\infty} k(x, r) f(r)\ dr, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lösung 18: Es gilt nach Definition von V für $x_1 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} V(x_1) &= \int_{-\infty}^{+\infty} f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\ )\ dx_2 \\ &= 2 \int_0^{+\infty} f(\sqrt{x_1^2 + x_2^2}\ )\ dx_2. \end{aligned}$$

Mit der Substitution $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ erhalten wir

$$dr = \frac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} dx_2,$$

bzw.

$$dx_2 = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x_1^2}}\ dr,$$

womit folgt

$$V(x_1) = 2 \int_{x_1}^{\infty} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x_1}} f(r)\ dr,$$

also

$$k(x, r) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } r < |x_1| \\ \frac{2r}{r^2 - x_1^2}, & \text{wenn } |x_1| < r. \end{cases}$$

Aufgabe 19: Zeigen Sie

(a) Es gilt

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ dx = \sqrt{\pi}.$$

Hinweis: Berechnen Sie das Quadrat des Integrals und nutzen Sie Polarkoordinaten.

(b) Es gilt für das folgende uneigendliche Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\ dx = \pi.$$

Hinweis: Berechnen Sie das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z} dz$$

mithilfe eines geeigneten Weges in der komplexen Ebene.

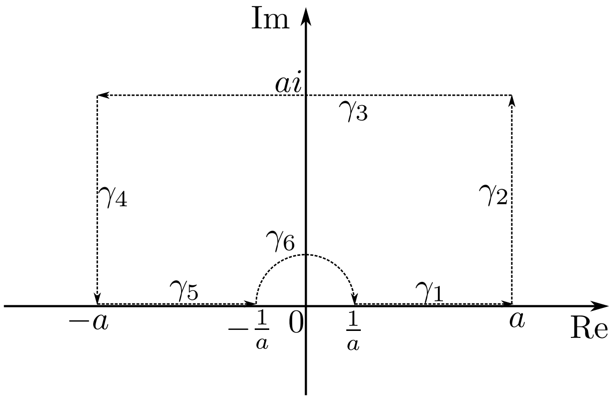
Lösung 19:

(a) Es gilt mit Polarkoordinaten in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx\right)^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\ dx \quad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2} dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx\ dy \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2} r\ dr\ d\phi \\ &= \int_0^{2\pi}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^{\infty}\ d\phi \\ &= 2\pi\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Ziehen der Wurzel liefert die Behauptung.

(b) Die Funktion $z \mapsto e^{iz}/z$ ist holomorph auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Wir integrieren über den in der Skizze gezeigten Weg $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup \gamma_3 \cup \gamma_4 \cup \gamma_5 \cup \gamma_6$.



Da γ zusammenziehbar in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist, gilt

$$0 = \int_\gamma \frac{e^{iz}}{z}\ dz = \sum_{n=1}^{6}\int_{\gamma_n}\frac{e^{iz}}{z}\ dz.$$

Wir betrachten für alle Integrale den Grenzwert $a \to \infty$. Zunächst sehen wir, dass

$$\left(\int_{\gamma_1} + \int_{\gamma_5}\right)\frac{e^{iz}}{z}\ dz = \left(\int_{-a}^{-1/a} + \int_{1/a}^{a}\right)\frac{e^{iz}}{z}\ dz \to \int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{iz}}{z}\ dz$$

gegen die gesuchte Grösse konvergiert. Für γ_2 gilt da $\gamma_2 = \{z : z = a + is, s \in (0,a)\}$:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_2}\frac{e^{iz}}{z}\ dz\right| &= \left|\int_0^a \frac{e^{ia-s}}{a+is} i\ ds\right| \\ &\le \int_0^a \frac{e^{-s}}{a}\ ds \\ &\le \frac{1}{a}\int_0^\infty e^{-s}\ ds \\ &= \frac{1}{a} \\ &\to 0.\end{aligned}$$

Analog behandelt man γ_4. Für $\gamma_3 = \{z : z = -s + ia, s \in (-a,a)\}$ gilt nun fast ebenso

$$\begin{aligned}\left|\int_{\gamma_2}\frac{e^{iz}}{z}\ dz\right| &\le \int_{-a}^{a}\frac{e^{-a}}{a}\ ds \\ &= 2e^{-a} \\ &\to 0.\end{aligned}$$

Und wir müssen nur noch das Integral über $\gamma_6 = \{\frac{1}{a}e^{-i\theta}, \theta \in (-\pi, 0)\}$ berechnen. Hier gilt

$$\begin{aligned}
\int_{\gamma_6} \frac{e^{iz}}{z}\, dz &= \int_{-\pi}^{0} \frac{\exp(\frac{1}{a}e^{-i\theta})}{\frac{1}{a}e^{-i\theta}} \left(-i\frac{1}{a}e^{-i\theta}\right)\, d\theta \\
&= \int_{-\pi}^{0} -i\exp(\frac{1}{a}e^{-i\theta})\, d\theta \\
&\to \int_{-\pi}^{0} -i\exp(0)\, d\theta \\
&= -i\pi.
\end{aligned}$$

Hierbei haben wir bei der Ausfhrung des Grenzwertes $a \to \infty$ genutzt, dass der Integrand integrierbar majorisiert ist und punktweise gegen $-i$ konvergiert. Wir erhalten also:

$$\begin{aligned}
0 &= \int_{\gamma} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \\
cv \quad &= \sum_{n=1}^{6} \int_{\gamma_n} \frac{e^{iz}}{z}\, dz \\
&\to \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z}\, dz - i\pi
\end{aligned}$$

Damit folgt

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(x)}{x}\, dx = \operatorname{Im} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z}\, dz = \operatorname{Im}(i\pi) = \pi.$$