Proseminar: mathematisches Problemlösen
Thema: elementare Beweismethoden
Referentin: Stefanie Maschner
Datum: 15.4.2008

Elementare Beweismethoden

Gliederung:

1) Aussagelogik
2) Direkter Beweis
3) Indirekter Beweis
4) Vollständige Induktion

Aussagelogik

Zum Begriff:
Aussage → sprachlicher Ausdruck, dem eindeutig der Wahrheitswert wahr = T (engl.: true) oder falsch = F (engl.:false) zugeordnet wird.
Logik → griechischen: die denkende Kunst / Vorgehensweise.
A und B seine im weiteren beliebige Aussagen, die sowohl wahr (T) als auch falsch (F) sein können. Die Negation eines Ausdruckes wird mit ¬ abgekürzt. → Negation von A = ¬**A**

A	B	A Λ B	A V B
T	T	T	T
T	F	F	T
F	T	F	T
F	F	F	F

A	B	A => B	A <=> B
T	T	T	T
T	F	F	F
F	T	T	F
F	F	T	T

Direkter Beweis

Hierbei geht es darum, dass man ausgehend von einer Behauptung A, die bereits als bewiesen angenommen wird, die Wahrheit des zu beweisenden Satzes, also der Behauptung B, ableitet.
Der direkte Beweis ist von kurzen transparenten Implikationsketten charakterisiert.
Problem: Allgemeingültigkeit, da alle möglichen Fälle abgedeckt werden müssen.

Beispiel:
Zu zeigen, dass folgende Gleichheit gilt: $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Als Axiome verwenden wir das Distributiv- und Kommutativgesetz
$(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ab + ba + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Sehr wenige Schüler kennen den Begriff "direkter Beweis". Doch sehr viele können den Weg beschreiben ohne den Oberbegriff zu verwenden. Schüler erinnern sich meist an die anschaulichen Beweise.
Direkte Beweise, an die sich Lehrer spontan erinnern können, sind auch die anschaulichen, wie z.B.:
Beweise von Kongruenzsätzen, Satz des Thales, Winkelsumme im Dreieck beträgt 180°,…u.v.m.

Indirekter Beweis

Beim indirekten Beweis (Widerspruchsbeweis) einer Behauptung A geht man bereits zu Anfang von der Negation der Behauptung A aus. Anschließend erfolgt eine endliche Kette von logischen Implikationen. Am Ende taucht ein Widerspruch eines Axioms auf.
→ ¬ A ist falsch. Somit ist A richtig.
Kurz gesagt gilt auch: wird ein Gegenbeispiel gefunden, so ist die Behauptung falsch.

Beispiel:

Zu zeigen ist: $\sqrt{2}$ ist irrational
Die zugehörige Negation lautet: $\sqrt{2}$ ist rational
Nun wird behauptet, dass eine bestimmte Zahl a existiert, für die gilt: a ist rational => $a^2 = 2$
O.B.d.A. nehmen wir an, dass a positiv ist und wie folgt als vollständig gekürzter Bruch dargestellt werden kann: $a = p/q$
Somit sind p und q teilerfremde natürliche Zahlen und eingesetzt folgt:
$a^2 = 2 \Rightarrow p^2/q^2 = 2 \Rightarrow p^2 = 2q^2$ → p^2 muss gerade sein und somit ist auch p gerade.
Es ergibt sich somit: $p^2 = 2\cdot 2r$, also gilt: $q^2 = 2r$

Somit ist auch q gerade. Dies ist ein Widerspruch zur Vorraussetzung!! (p und q waren als teilerfremd Vorausgesetzt.)

Vollständige Induktion

Das Prinzip der vollständigen Induktion beruht darauf, dass ausgehend von einem Einzelfall, unter vollständiger Erfassung aller Einzelfälle, ein allgemeines Gesetz begründet wird.
Die vollständige Induktion ist in drei Teilschritte unterteilt:

- Induktionsanfang → kurz: IA
- Induktionsvoraussetzung → kurz: IV
- Induktionsschritt / Induktionsschluss → kurz: IS

Achtung: eine vollständige Induktion muss nicht immer möglich sein!

Beispiel:

1) Eulersches Polynom, $x^2 + x + 41$, liefert für die Zahlen $x = 1,2,\dots,39$ nur Primzahlen.
   Aus diesem Grund könnte man theoretisch davon ausgehen, dass stets Primzahlen geliefert werden.
   IA mit $x = 40$: $40^2 + 40 + 41 = 41^2$
   Klar ist, dass 41^2 keine Primzahl ist. Somit klappt hier der Induktionsschritt nicht.
2) Für die Summe der ersten gerade Zahlen gilt: $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n(n+1)$
   IA mit $n = 1$: $1\cdot(1 + 1) = 2$
   IV: Aussage gilt auch für ein beliebiges k mit $k \geq n_0$.
   IS: $$\begin{aligned} 2 + 4 + 6 + \dots + 2k + 2(k+1) &= k(k+1) + 2(k+1) \\ &= (k+1)\cdot(k+2) \\ &= (k+1)\cdot((k+1)+1) \end{aligned}$$

Lehreraussagen:

Beweise in der Mathematik sind sehr wichtig. Vor allem zum Training des logischen Schlussfolgerns und Argumentieren.

Mathematik ist die einzige Wissenschaft, die schließlich alles beweisen kann, was sie behauptet. Beweise müssen anschaulich sein und möglichst wenig formal.

Ziel am Gymnasium muss sein, dass Beweise selbst durchgeführt werden können.

Selbständiges beweisen wird theoretisch verlangt, aber im Alltag, sind jedoch häufig Tipps vom Lehrer nötig.

Die originellsten Schüleraussagen:

Beweise sind nicht wichtig. Formeln reichen aus, da in Arbeiten nie nach einem Beweis sondern nur nach einer Lösung für eine Aufgabe gesucht wird. (11-te Klasse)
Wenn ich einen Beweis nicht verstehe, dann spreche ich ihn mit meinem Nachhilfelehrer durch. (11-te Klasse)
Bei mathematischen Beweisen vertraue ich meinem Mathelehrer voll und ganz! (11-te Klasse)
Wenn ich einen Beweis nicht verstehe, lehne ich mich zurück, da ich ohnehin nur die Formel benötige, ohne es verstanden zu haben. (11-te Klasse)
Wer Mathematik und die Zusammenhänge nicht versteht hat keine Ahnung davon. (12-te Klasse)
Der Schüler wird mit Dingen (hier: mathematische Beweis) belastet die er gar nicht kann. (12-te Klasse)
Es kommt ganz darauf an, welche Erwartungen man an sich stellt. Wenn man gute Ergebnisse anstrebt, reichen nur die Formeln nicht immer aus. (12-te Klasse)

Fazit:

Anhand meiner eigenen Erfahrung und der Fragebögen, ist klar geworden, dass Schülern der Sinn, als auch die Wichtigkeit von mathematischen Beweisen nicht ganz klar ist. Problem ist, dass sie sich nicht trauen. Viele Schüler haben sich selbst bereits aufgegeben. Dies liegt aber auch zum Teil daran, dass bereits sowohl die Gesellschaft, als auch das Elternhaus, kein positives Verhältnis zur Mathematik haben und sich dies auf die jüngere Generation überträgt.
Ziel eines Lehrers soll es sein, diese Denkweise zu widerlegen und den Schülern/innen neuen Mut zu machen.

Quellen:

Literatur
Lösungsstrategien – Mathematik für Nachdenker, Natalie Grinberg, Verlag Harri Deutsch Mai 2008
Logik im Klartext, John Kelly, Pearson Studium 2003

Interquelle
www.twschwarzer.de/els/sonstiges.pdf
www.matheplanet.de/extra/beweise.pdf
www.mathematik.de/mde/information/landkarte/stichpunkte/beweis.html