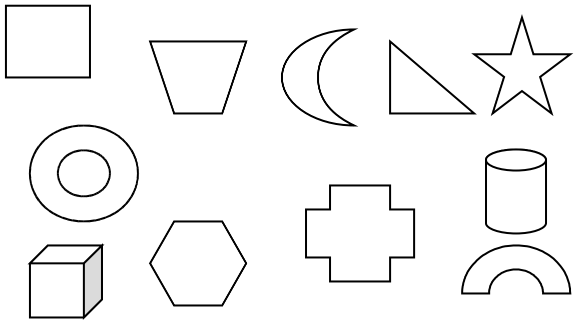
Proseminar: Mathematisches Problemlösen
Thema: Konvexität
Referentin: Nicole Dietrich
Datum: 29. April 2008

Konvexität



Gliederung

1. Konvexe Mengen
2. Konvexe Funktionen
3. Konvexität in der Schule

1. Konvexe Mengen

Definition

Eine Menge $K \subset \mathbb{R}^m$ heißt konvex, wenn für zwei beliebige Elemente x_1 und x_2 aus K auch deren Verbindungsstrecke
$[x_1, x_2] = \{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 : \alpha_1, \alpha_2 \geq 0, \alpha_1 + \alpha_2 = 1\}$ in K liegt.

2. Konvexe und konkave Funktionen

Definition „konvex“

Es sei $K \subset \mathbb{R}^m$

Eine Funktion $f: K \to \mathbb{R}$ heißt konvex, wenn für zwei beliebige Elemente x_1 und x_2 von K und beliebige nichtnegative Koeffizienten α_1 und α_2 mit $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ die Ungleichung

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

erfüllt ist.

Beispiel: Parabelfunktion

Definition „konkav“

Es sei $K \subset \mathbb{R}^m$

Eine Funktion $g: K \to \mathbb{R}$ heißt konkav, falls für zwei beliebige Elemente x_1 und x_2 von K und beliebige nichtnegative Koeffizienten α_1 und α_2 mit $\alpha_1 + \alpha_2 = 1$ gilt:

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geq \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)$$

Beispiel: Wurzelfunktion

Der Graph einer konvexen Funktion ist so gewölbt, dass die Menge der Punkte oberhalb des Graphen, der so genannte Epigraph, eine konvexe Menge ist. Der Graph einer konkaven Funktion ist so gewölbt, dass die Menge der Punkte unterhalb des Graphen, der so genannte Hypograph, eine konvexe Menge ist. Zu beachten ist, dass eine nicht-konvexe Funktion nicht automatisch konkav sein muss, d. h., konvex und konkav sind hier nicht komplementär. Jede lineare Funktion ist sowohl konkav als auch konvex.

3. Konvexität in der Schule

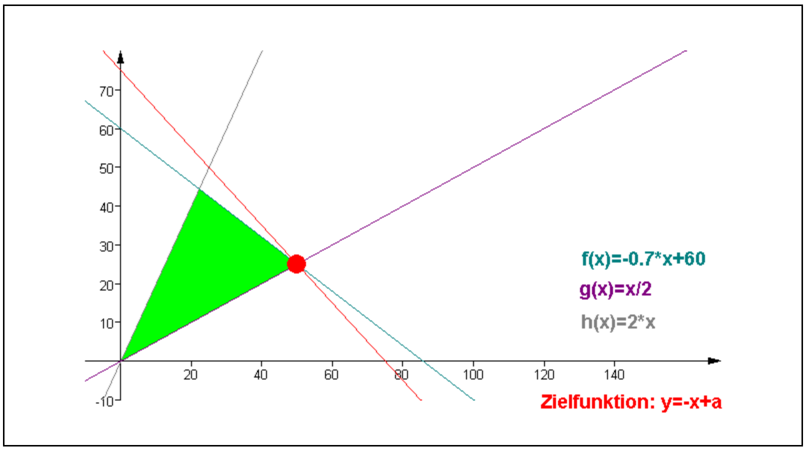
- **Geometrie**

Stelle die Teile des Tangram-Spiels nach der Vorlage aus Karton her

- Aus welchen Formen besteht das Spiel?
- Lege die abgebildeten Formen nach. Erfinde selbst eigene Figuren
- Lege möglichst viele konvexe Polygone (es gibt insgesamt 13). Findest du alle?

- **Lineare Optimierung**

Die Firma Weidig-Design stellt zwei Sorten von Steingefäßen her. Die größeren wiegen 50kg, die kleineren 35kg. Der Lieferwagen kann höchstens 3t laden.
Der Fahrer erhält folgenden Auftrag:
So viele Gefäße wie möglich transportieren.
Mindestens halb so viele große wie kleine Gefäße.
Höchstens doppelt so viele große wie kleine Gefäße.



Lösung: 50 kleine Gefäße
25 große Gefäße

→ insgesamt 75 Gefäße, Gewicht: 3000kg

- **Kurvendiskussion**

$f(x) = 1/3\, x^3 - x^2 + 8/3$

In welchen Bereichen der Funktion ist die Kurve so gewölbt, dass die Menge der Punkte oberhalb des Graphen konvex ist? In welchen Bereichen ist die Funktion konkav?

$x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $\alpha_1 = 0{,}5$, $\alpha_2 = 0{,}5$

$f(\ 0{,}5 - 1) \geq 0{,}5 \cdot 2 + 0{,}5 \cdot (-4)$

$f(-0{,}5) \geq -1$

$2{,}375 \geq -1$

$\Rightarrow]-\infty, 1] \rightarrow$ konkav

Analog $]1, \infty[\rightarrow$ konvex