Proseminar: Mathematisches Problemlösen
Thema: Das Extremalprinzip
Datum: 27.05.2008
Referent: Lukas Eichhorn

---

# Das Extremalprinzip

## *Gliederung:*



## 1.) Einführung:

Das Extremalprinzip wird in der Schule nicht unter diesem Namen eingeführt. Allerdings verwendet man es ständig, z.B. bei Kurvendiskussionen, GGT, KGV oder bei verschiedenen anwendungsbezogenen Aufgaben.
Das Extremalprinzip ist eine der wichtigsten Strategien zur Lösung mathematischer Probleme, in denen man ein Element sucht, das gewisse Eigenschaften besitzt. Dabei wird diesem Element der größte oder kleinste Wert zugeordnet wodurch es extremal wird.
Es findet auch in vielen anderen Wissenschaften seine Anwendungen, z.B. Physik (Minimierung der potentiellen Energie), Biologie (Selektion).

## 2.) Theorie

***Definition:***
Wenn die Existenz eines Objektes bewiesen werden soll, so ist dieses häufig das Extremum einer Funktion oder einer Menge.

## 2.1.) Endliche Mengen von reellen Zahlen

***Eigenschaft:***
Jede endliche nichtleere Menge A von reellen Zahlen hat ein kleinstes Element min(A) und ein größtes Element max(A). Dies trifft natürlich insbesondere auf Mengen von natürlichen Zahlen zu.
***Aufgabe:***
In einer Klasse von 30 Schülern gibt es folgende Situation: Je 2 Schüler mit der gleichen Anzahl von Freunden (in der Klasse) haben keine gemeinsamen Freunden. Begründe, dass es einen Schüler mit genau einem Freund gibt.
*Lösung:* In einer endlichen Menge gibt es ein Maximum. Schüler A habe die Maximalzahl von Freunden, z.B. 5. Diese 5 haben unterschiedliche Anzahlen von Freunden, da sie A als Freund haben. Sie haben mindestens einen Freund, nämlich A. Also sind ihre Freundeszahlen 1, 2, 3, 4, 5.

## 2.2.) Mengen von natürlichen Zahlen

***Eigenschaft:***
Jede bel. (also endliche oder unendliche) nichtleere Menge von natürlichen Zahlen hat ein kleinstes Element. Ein größtes Element hat sie offensichtlich nicht immer.
***Aufgabe:***
100 Studenten besuchen eine Vorlesung. Jeder Student kommt und geht wann er will (aber nur jeweils einmal). (*) Es ist bekannt, dass es unter drei beliebig herausgegriffenen Studenten stets zwei gibt, die eine Weile gemeinsam in der Vorlesung anwesend sind. Der Dozent will eine wichtige Ankündigung machen. Beweisen Sie, dass es genügt, die Durchsage zweimal (zu geeignet bestimmten Zeitpunkten) zu machen, um sicherzustellen, dass sie von allen Studenten gehört wird.
*Lösung:* Das Intervall der Vorlesung wird mit [0,1] bezeichnet. Für jeden Student $S_n$ (n=1,…,100) gibt es ein abgeschlossenes Intervall $I_n=[a_n,b_n]$, Teilmenge von [0,1], in dem der Student in der Vorlesung anwesend ist. A bezeichnet den Zeitpunkt, an dem der letzte Student eintrifft und B den Zeitpunkt, an dem der erste Student die Vorlesung verlässt. $A = \max\limits_{n=1,\dots,100} a_n$ ; $B = \min\limits_{n=1,\dots,100} b_n$
Nun unterscheidet man 2 Fälle.
<u>Fall I: A≤B:</u> Das bedeutet für jedes n also, $a_n \le A \le B \le b_n$ oder [A,B] Teilmenge von $I_b$. Es gilt [A,B] Teilmenge von $I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_{100}$. Dies bedeutet, dass jeder Punkt $x \in [A,B]$ ein gemeinsamer Punkt aller Intervalle $I_n$ ist. Das heißt, der Dozent braucht seine Information nur einmal anzukündigen.

Fall II: A>B: O.B.d.A. sei $a_1 = A = \max\limits_{n=1,\ldots,100} a_n \wedge b_2 = B = \min\limits_{n=1,\ldots,100} b_n \wedge I_1 \cap I_2 = \varnothing$
Dann schneiden sich die beiden Intervalle $I_1$ und $I_2$ nicht, da die obere Grenze $b_2$ von $I_2$ kleiner ist, als die untere Grenze $a_1$ von $I_1$. Daraus sieht man, dass sich der erste und zweite Student nicht getroffen haben. Es wird behauptet, dass jedes andere Intervall $I_n$ entweder A oder B enthält. Mit (*) folgt, dass $I_n$ entweder mit $I_1$ oder $I_2$ schneidet. Es sei z.B. $I_1 \cap I_n \neq \varnothing$. Dann folgt aus $a_n \leq A = a_1$ die Abschätzung $b_n \geq a_1$ und daraus $a_n \leq a_1 = A \leq b_n$. Also ist $A \in [a_n, b_n]$. Es sei nun. $I_2 \cap I_n \neq \varnothing$. Dann folgt aus $b_n \geq B = b_2$ die Abschätzung $b_2 \geq a_n$ und daraus $a_n \leq b_2 = B \leq b_n$. Also ist $B \in [a_n, b_n]$. Also muss der Dozent seine Druchsage nur an den Zeitpunkten A und B machen, damit die Information von jedem Student gehört wird. Wieviele Studenten die Vorlesung besuchen ist unwichtig. Der Dozent muss lediglich die Anzahl wissen, um den Zeitpunkt A bestimmen zu können.

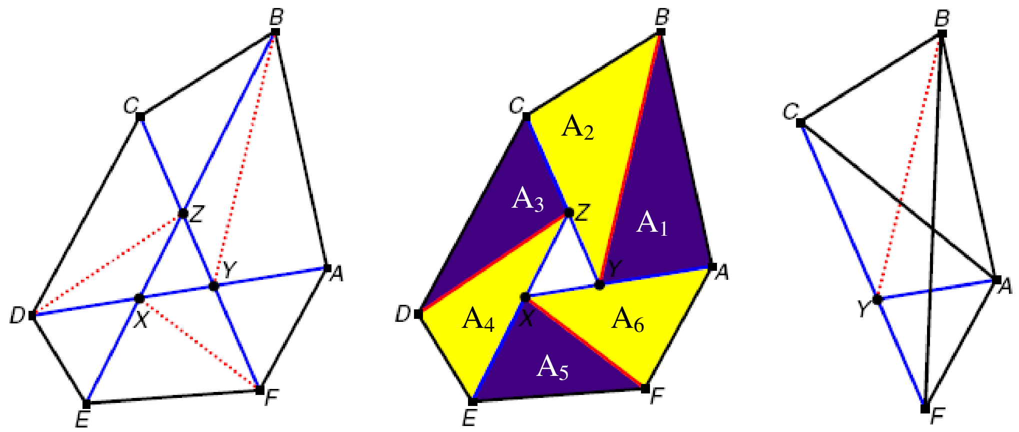
## 2.3.) Beliebige Mengen von reellen Zahlen

***Eigenschaft:***

Eine beliebige Menge A von reellen Zahlen besitzt im Allgemeinen weder ein kleinstes noch ein größtes Element. Ist sie allerdings nach oben beschränkt, so hat sie eine kleinste obere Schranke (Supremum) sup(A); ist sup(A)$\in$A (d.h. gehört die kleinste obere Schranke der Menge A zur Menge A selber), dann ist sup(A) auch das größte Element der Menge A.
*Entsprechend gilt:* Ist sie nach unten beschränkt, so besitzt sie eine größte untere Schranke (Infimum) inf(A), die im Fall inf(A)$\in$A das kleinste Element der Menge A ist.

***Aufgabe:***

Es sei ABCDEF ein konvexes Sechseck mit der Fläche 1. Zeigen Sie, dass es (mindestens) eine Diagonale dieses Sechsecks gibt, die von ihm ein Dreieck mit einer Fläche $\leq 1/6$ abschneidet.
*Lösung:* Man zeichnet die Hauptdiagonalen von dem Sechseck und bezeichnet ihre (möglicherweise gleichen) paarweise Schnittpunkte mit X, Y, Z. Betrachtet man nun die sechs Dreiecke ABY, BCY, CDZ, DEZ, EFX und FAX. Da die Fläche dieser sechs Dreiecke zusammen kleiner oder gleich 1 ist, sie bilden nämlich das Sechseck ABCDEF ohne das Dreieck XYZ, hat das kleinste dieser Dreiecke eine Fläche, die kleiner oder gleich 1/6 ist. Es gilt: $A_1+A_2+A_3+A_4+A_5+A_6 \leq 1$. Daraus folgt: $A_{min} \leq 1/6$. Es sie z.B. $A_1 \leq 1/6$. Dann gilt: $\min\{A_{ABT}, A_{ABC}\} \leq A_1 \leq \max\{A_{ABT}, A_{ABC}\}$. Das folgt aus der Betrachtung der Höhen von F, Y, C auf die Seite (AB). Daraus folgt, dass das kleinere der beiden Dreiecke ABF und ABC eine Fläche $\leq 1/6$. Daraus folgt die Behauptung.



(a) $X$, $Y$ und $Z$ sind die Diagonalenschnittpunkte
(b) Teilung in sechs kleine Dreiecke
(c) $|ABY| \leq \min\{|ABF|, |ABC|\}$

## 3.) Übertragung auf andere Fächer (Physik) / Das Fermatsche Prinzip

Um den fächerübergreifenden Unterricht zu fördern, wenden wir nun das Extremalprinzip in der Physik an. Dabei wird das Fermatsche Prinzip verwendet, das folgendes besagt: Das Licht nimmt immer den Weg durch unterschiedliche Medien, der die geringste Laufzeit benötigt. Es ist die Grundlage der Optik.

## Quellen:


http://www.hft-stuttgart.de/Mathematik/aus/mitmachStud/themen/index_html
http://www.bertramkoehler.de/PR1.htm
Grinberg, Natalie, Lösungsstrategien: Mathematik für Nachdenker, Verlag Harri Deutsch, 2008